





TRATTATO

DE' SOLIDI ORDINATI, O REGOLARI,

DE' SOLIDI, CHE SARAN DETTI INNOMINATI,

DI QUELLI, CHE SI DIRANNO

DI SECONDA OPERAZIONE,

E

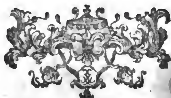
DELLE PROPRIETA' DELLA SFERA,

CHE

DA TALI SOLIDI SI RIPETONO

DEL SACERDOTE NAPOLETANO

CESARE PUOTI.





IN NAPOLI M.DCCC.I.

NELLA STAMPERIA SIMONIANA.

Con licenza de' Superiori.

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR GENERALE

D. GIOVANNI ACTON

CAVALIERE DEGL' INSIGNI ORDINI

D I

S. GENNARO, E S. FERDINANDO,

E

CONSIGLIERE DI STATO IN ATTIVITA'
DELLA MAESTA'

D I

N. S. D. G.

RE DELLE DUE SICILIE.

ECCELLENZA

IL Trattato de' Solidi Ordinati, o Regolari, che per la prima volta al Pubblico ſi moſtra oltre di ſviluppare gli attributi di queſti Solidi, e di aprirci il cammino per la cognizione di altri ignoti Soli-

di tant' opportuni, per intendere la natura degli angoli Solidi, e per discernere nella Sfera nuovi attributi, tende di vantaggio direttamente a fissare, e rettificare in noi le tanto vaghe, estese, ed astratte idee dell' Ordine, e della Regolarità.

Lo sviluppo di queste idee solleva l' uomo a riconoscere, e venerare un Ente Supremo sommamente Savio, sommamente Potente autor dell' Ordine dell' Universo; lo solleva a riconoscere in se un principio pensante, dal conoscersi capace d'intendere, e di produr l'Ordine; e lo solleva in fine a riconoscere, e rispettare nella Società, per poter

essere

essere ordinata un Principe, come quella Parte di Essa, che si conoscerà dell' essenza di ogni Ente Ordinato, con cui le altre tutte àn rapporto, dipendenza ed attacco; sarebbe dunque degno della generosità dell' E. V., che à saputo tanto ben sostenere i diritti dell' Ordine, or che i maligni tentavano di rovesciarlo, il garentire anche quest' opera, che tende allo stesso; permetterà perciò Ella, ch' io fregi, ed illustri queste mie deboli fatiche del glorioso suo Nome, cui intendo sacrarle, e saprà, mi auguro, soffrire un tale ardire, ove vegga provvenirlo men dalla voglia di sostener l'opera, che da quella di ve-

derne l'effetto ;. giacchè ſollevateſi queſte notizie a quell' altura, in cui le ſue doti più, che la carica àn giuſtamente iſtallata l' E. V., ed animate dall' aura della valevole ſua protezione più agevolmente dovranno negli altri tutti diffonderſi; dovendo così ciaſcuno, imitando la generoſità dell' E. V., non oſtante l'incultura del fonte, approſſimar volentieri il ſecondo le labbra a quelle acque, alle quali non à l'E. V. ſdegnato di approſſimarle dapprima.

La ſviluppata idea dell'Ordine ci moſtra di vantaggio, che il legame, che l'Ordine ſteſſo induce tra la Parte Principale, e le altre tutte di ogni Ente Ordinato così

mo-

modifichi le forze, e le tendenze di esse, che faccia insorger nel Tutto quel momento, ch'è il solo opportuno a conseguirne l'Oggetto; e così, che quello, con cui l'Ordine annoda il Sovrano co' vassalli tutti lo sia così mirabilmente contesto, che modificando in Quegli, e questi le forze, le voglie distribuisca con tanto proporzionato equilibrio tra di essi i diritti, i doveri, che induca l'esercizio, e l'adempimento di questi nella Società quella comune armonia, tranquillità, salvezza, in cui solo ne risiede l'Oggetto; se è così dovrà tanto ciascun vassallo interessarsi, per rischiarare, e stabilire, i Sacri diritti dell'Ordine,

dine, e perciò quelli del Sovrano, quanto lo deve, per proccurare il proprio bene; e perciò quel vaſſallo, che, per quanto è da ſe, s'incarichi di un tale oggetto, facendo il ſuo dovere, non fa, che il proprio vantaggio, e così trova nell'opra ſteſſa il ſuo più, che generoſo compenſo.

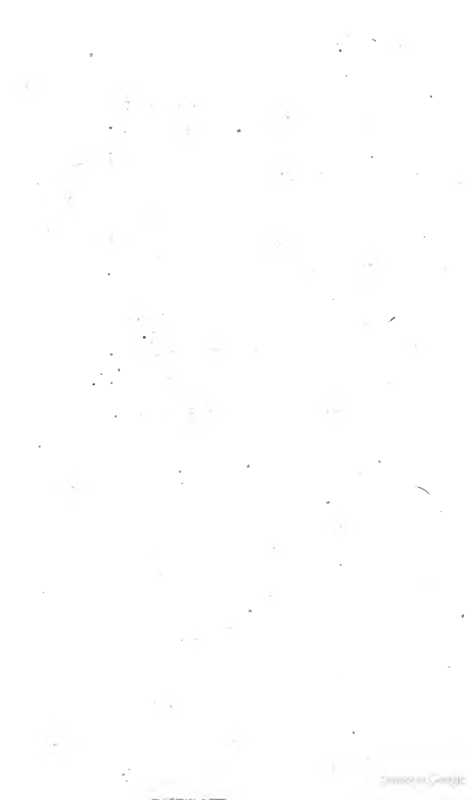
Baſterà queſto, per aſſicurare l'E. V., che il ſolo deſiderio di veder l'Ordine riſtabilito in quel grado immigliorabile, in cui fu dall'Autore, che non fa, che il perfetto, iſtallato, abbia dato moſſa al mio labbro, e che altro, perciò non ſappia io dal Signore, volendo il proprio bene, implorare, che di conſervarci imman-

cabilmente i Noſtri Auguſti Amabiliſſimi Sovrani, e quei, che ne ſono il ſoſtegno, e le braccia, come quelli, che a noi preſta l'Ordine, acciocchè nel reggerci ci ottengano la noſtra felicità; e così queſto ſteſſo aſſicura me, che voglia l' E. V. tanto amica dell' Ordine, e perciò tanto giuſtamente attaccata al Sovrano, compiacerſi di gradir queſta offerta, e di concedermi dacciò l' onore di credermi, come mi dico inalterabilmente per ſempre

Di V. E.

Napoli del 1801.

Umiliſs. ed obbligatiſs. ſerv. vero
Ceſare Puoti.



INDICE

DE' CAPI.

CAPO



DE' SOLIDI ORDINATI, O REGOLARI.

PREFAZIONE.

§. 1. CHe abbia di comune l' Ordine colla Regolarità, onde i Solidi Regolari siansi anche detti Ordinati è necessario premettere al trattato di questi Solidi; questo si otterrà coll' esporre le idee dell' Ordine, e della Regolarità; e così fissatesi queste idee tanto per loro stesse vagh' ed astratte saranno anche di sicura scorta nella ricerca degli attributi di questi Solidi.

§. 2. L' Ordine non è, che quella disposizion delle parti di un tutto qualunque, che lo rende più adattato all' oggetto, cui è destinato.

§. 3. La Regolarità sia in un piano, sia in un Solido non è, che quella di-

ſpoſizione delle ſue dimenſioni, cioè, delle ſue parti, che alla ſua regola, o ſia ſua norma più adattato lo rende.

§. 4. Regola, o Norma della Regolarità ſi è l' uniformità, giacchè non può concepirſi un ſoggetto qualunque Regolare, ſenza concepire in eſſo una convenienza, e conformità con una data ſua regola, o ſia ſua Norma; ove dunque voglia concepirſi un ſoggetto Regolare ſenz' aſſegnarne l' eſterna ſua Regola, con cui convenga, è neceſſario, che queſta in eſſo ſteſſo ſi rinvenga, è neceſſario cioè, così comprender diſpoſta ciaſcuna ſua parte, da eſſer la ſua diſpoſizione di regola, e norma a ciaſcuna delle altre; è neceſſario dunque comprenderle tutte uniformemente diſpoſte; ecco perchè la regola, o norma della Regolarità non ſia, che l' Uniformità (a).

§. 5.

(a) Se l' Uniformità aſſicura la Regolarità ſia de' piani, ſia de' Solidi; e ſe non può dubitarſi, che riſieda nel cerchio, e nella sfera una onnimoda Uniformità; perchè non numerarſi il cerchio tra piani, la sfera trà Solidi Regolari? I Matematici àn voluto trattar de' ſoli rettilinei regolari nella Piana, ed ànno accennat' i ſoli Poliedri Regolari nella Solida; ſotto queſti aſpetti non entrava nè il Cerchio, nè la sfera,

§. 5. L' Ordine dunque abbraccia i tutti d' ogni genere, la Regolarità i soli dimensimili, l'Ordine riguarda in quelli la disposizion delle part' in rapporto all' Oggetto, la Regolarità riguarda in questi la disposizion delle parti in rapporto alla norma; la Regolarità dunque

ra, de' quali perciò àn separatamente trattato. Chi però nell' ordinare l' intero corso di Matematica, sollevatosi di un altro scalino, volesse riguardar la Regolarità, che poss' aver luogo tra piani, e quella, che possa tra Solidi rinvenirsi, dovrebbe certamente cominciar dal cerchio ne' piani, e dalla sfera ne' Solidi. Si osserverà in fatti nel decorso dell' opera un sommo stretto nesso, e ligame, che à il cerchio co' piani, e la sfera co' Solidi Regolari; e si conoscerà ne' piani Regolari un punto equidistante dagli anguli, e dai lati; e nei Solidi Regolari un punto dagli anguli, dai piani, e dai lati equidistante; e si vedrà di vantaggio un tale attributo tanto ai primi, ed ai secondi essenziale, che questo solo ammessos' in un piano, in un Solido si troverà quel piano, quel Solido Regolare; dal che, siccome l' Uniformità si è l' interna norma della propria Regolarità, che ciascuno piano, o Solido Regolare in se stesso comprende; così potrebbe anche dirsi, che l' esterna, e comune norma de' piani, o Solidi Regolari sia il cerchio, o la sfera, che sia cioè, la continua uniformità di questi norma della discontinua uniformità di quelli. Resterà tutto ciò maggiormente confermato dal conoscersi appresso dei solidi, oltre i cinque già noti, terminati da piani regolari, simili, ed eguali, che non altrimente posson credersi non Regolari (come realmente non sono), che per non esser uniformi anche negli anguli Solidi, nè nella sfera iscrittibili.

non è, che ſpecie dell' Ordine; ecco d' onde comincia a vederſi il perchè da' Matematici i piani, e Solidi Regolari ſianſi anche detti Ordinati (*a*).

§. *6*. L' idea dunque dell' Ordine è aſtratta, e relativa; aſtratta perchè di un tutto qualunque ne riguarda la ſola diſpoſizion delle parti, relativa perchè tra tutte le poſſibili combinazioni, che poſſono aver luogo tra le parti di un tutto qualunque, quella ſola è ordinata, che più corriſponde all' Oggetto.

§. 7. Così del pari aſtratta, e relativa ſi è l' idea della Regolarità; aſtratta perchè di un qualunque dimenſibile ne riguarda la ſola diſpoſizion delle parti, cioè delle ſue dimenſioni; relativa, perchè di tutte le poſſibili diſpoſizioni di eſſe quella ſola è regolare, che più corriſponde alla Norma. Siccome dunque riſiede l' Ordine nella maſſima corriſpondenza all' oggetto; così riſiede la Regolarità nella maſſima corriſpondenza alla Norma.

§. 8.

(a) Qual ſia l' attributo, pel quale queſta ſpecie ſuperi il ſuo genere ſi vedrà in appreſſo.

§. 8. Deve di vantaggio l' idea dell' Ordine riguardarsi, come un quarto termine provveniente da tre; dall' idea cioè, di un Soggetto risultante da parti, e perciò variamente disponibili, che può acciò dirsi Ente Ordinabile, da quella di una Forza, che può variamente disporre quelle parti, che può acciò dirsi Ente Ordinante; e da quella in fine di un Oggetto, a cui venga l' Ordinabile dall' Ordinante diretto coll' indotta in esso disposizion delle parti.

§. 9. Varia dunque l' Ordine da altrettanti principj, per rapporto cioè, dell' Ente Ordinante, per rapporto dell' Ordinabile, e per rapporto dell' Oggetto; sarà dunque l' estension dell' Ordine in ragion composta di questi; conosceremo perciò la sua estensione, conosciuta quella de' suoi fattori.

L' Ente Ordinante.

§. 10. Se l' Ordine risiede, in quella disposizion delle parti, che più corrisponde all' Oggetto (§ 2), dovrà l' Ente Ordinante, per produr l' Ordine, esa-

 mi-

minare tutte le combinazioni, che possono aver luogo tra le parti del tutto, che intende ordinare, e scegliere, ed indurre quella, che trova più corrispondente all' Oggetto; deve dunque l' Ente Ordinante esser fornito di ragione, e di forza, e perciò sarà l' estensione degli Enti Ordinanti eguale a quella degli Enti ragionevoli.

§. 11. Dal che, non potendo l' effetto aver luogo senza la causa, nè mai eccederla; potremo dall' Ordine conoscere l' esistenza, ed il momento di forza, e di ragione, che almeno risieda nell'Ente Ordinante; e perciò potremo giustamente dall'Ordine, che nell'universo incontrastabilmente si ammira, conchiudere, *Esiste l' Ordinante di un tant' Ordinato sommamente savio, sommamente potente.*

§. 12. E così dovremo parimente per lo stesso principio riguardar l' Ordine, come conseguenza, ed effetto della più esatta, e raffinata dimostrazione dell'Ente Ordinante; e dovremo perciò riconoscere in esso o una somma, e Suprema Intelligenza, o quella, che in quel punto di questa tanto imita i tratti, che

ci

ci afficuri, effere animata dall' Imagine di questa Suprema Entità. Riconoſciamo dunque, e veneriamo nell' Ordine o la steſſa Suprema Intelligenza, o l' imagine di eſſa; e riconoſciamo, e riſpettiamo nell' uomo, che può nella ſua riga intendere, e produr l' Ordine tale imagine della Suprema Intelligenza, che da eſſa ſolamente poteva in eſſo iſpirarſi.

§. 13. E' dunque l'Ordine, come uno ſpecchio, che tramezzà la Infinita, e le finite intelligenze; vediamo in quello, per quanto a noi lice, i tratti della Suprema Entità; ed in queſta veduta medeſima vediamo vivere in noi l' imagine di Eſſa dallo ſteſſo Benefico Originale iſpirata, e rifleſſa.

L' Ente Ordinabile.

§. 14. Se è queſto ogni tutto qualunque, cioè, qualunque Soggetto riſultante da parti (§ 8), potendo ogni Ente Contingente riguardarſi, o come un Tutto, o come una parte della ſpecie, cui appartiene, o nell' uno, o nell' altro aſpetto inſieme; giacchè non eſiſte Ente Con-

tingente, che non ne riconosca altri della stessa specie; sarà ogni Ente Contingente all' Ordine Soggetto, cioè ordinabile; e così sarà l' estenzione dell' Ente Ordinabile tanto maggior di quella dell' ente contingente, quanto le cose, e le specie insieme son delle cose.

§. 15. Se sono anche le specie ordinabili, potendosi riguardar, come tutti, de' quali siano gl' individui le parti; sarà figlio della cognizion dell' Ordine anche il discernere qual forma di Governo più conveng' alla Società per ottenerne l' Oggetto.

L' Oggetto.

§. 16. Questo non è, che ciocchè si vuole, che ottenga il Tutto coll' indotta in esso disposizion delle parti (§ 8); or se l'Ordine importa (come a suo luogo vedremo), che niuna parte dell'Ente Ordinato sia sciolta dalla catena, dal nesso della cospirazione all' Oggetto, e se non può negarsi, che un Ordine esista nell' Universo; dovrem dire, che ciascun ente anche il più picciolo, ed agli occhj degli sciocchi disprezzabile, abbia il

suo

suo oggetto particolare, e che questi tutti mirabilmente cospirino all'Oggetto Generale; anzi, siccome non esiste materia, che non possa ricever diverse forme, cioè dirigersi a diversi Oggetti, nè specie di cui non possa farsi lo stesso; intenderemo da ciò, esser l' estension degli Oggetti molto maggior di quella delle cose, e specie insieme.

§. 17. Veduta dunque la somma estension dei termini quasi fattori dell' Ordine, potremo avvicinarci ad intendere, l' interminata estensione di Esso; Di questa idea dunque tanto vaga, ed estesa, che tutto comprende, tutto abbraccia, tutto riguarda, e che solo provviene dalla più esatta dimostrazione, debbon credersi essere i caratteri, e gli attributi particolari, cioè di ciascun ordine particolare tutte le più raffinate conseguenze de' principj, delle dimostrazioni, de' precetti, delle regole delle scienze tutte, delle facultà, delle arti, che non è possibile in un solo aspetto comprendere; nè volendo, come quì far s' intende, sviluppare la generale idea dell'Ordine, per così scorgere quanto abbia di comune con quella

quella della Regolarità, altro resta ad esaminare, che i soli generali, ed essenziali caratteri, ed attributi di Esso; lasciando dunque alle scienze, ed arti tutte la cura di fissarne gli speciali caratteri, ed attributi, ci addirremo all' esame de' soli generali.

§. 18. Questi son tre l'Unità, il Minimo Possibile, la Parte Principale.

§. 19. L'Unità,
è
Dell' essenza dell' Ordine.

I. Dovendo in un Tutto, per essere Ordinato, la disposizion delle parti esser quella, che lo renda più adattato all'Oggetto, cui è destinato (§ 2); questa potrà solo aver luogo, quando ciascuna sua parte sia a quello diretta, quando, cioè, ciascuna così cospiri verso lo stesso, da dover insieme tutte ottenere ciocchè non possono separate; or questa direzione, e questa cospirazione si è appunto quella catena, quel nesso, che forma delle parti tutte, quantunque distinte, un tutto solo; è dunque dell' essenza dell' Ordine l' Unità.

II.

II. Se una sola parte sia sciolta dalla catena della cospirazione, e perciò dall' Unità, non entrerebbe questa in quella combinazione, che l' Ordine produce; e perciò sarebbe l' indotta combinazione, nell'ipotesi, quella, che avrebbe reso non il Tutto, ma, se fusse possibile, parte di esso adattat' all' Oggetto; ma rende l'Ordine il Tutto, e non già parte di esso adattat' all' Oggetto (§ 2); è dunque dell' essenza dell' Ordine l' Unità.

COROLLARJ.

§. 20. I. Segue dall' Unità, che debba tra le parti tutte d' ogni Ente Ordinato aver luogo un rapporto, ed attacco.

§. 21. II. Ma segue dall' Ordine l'Unità; dunque è dall'Ordine anche il legame; ma la cospirazione delle parti tutte all'Oggetto, (che forma il legame) rende il Tutto capace di conseguirlo; il legame dunque con cui l' Ordine annoda le parti tutte d' ogni Ente Ordinato è quello, che lo rende capace di conseguirne l' Oggetto; deve dunque sì fatto legame così modificar delle parti le tendenze

denze le forze, che faccia insorgere nel Tutto quel momento, ch' è il sol opportuno a conseguirne l' Oggetto.

§. 22. III. Poichè tutte le parti d'ogni Ente Ordinato cospirano all'Oggetto, e ciascuna non può sola ottenerlo; dovrem da ciò considerar l'Oggetto di ogni Ente Ordinato, come diviso a tutte le part' in tanti oggetti particolari, ed in modo, che cospirando le parti agli oggetti particolari ottengano al Tutto l'Oggetto Generale; è dunque dell' essenza dell' Ordine, che ciascuna parte abbia il suo oggetto particolare, e che da questi tutti risulti l' Oggetto Generale.

§. 23. IV. L' Ordine dunque esclude così ogni parte sciolta inoperosa, e senz' oggetto suo particolare, come ogni altra dirett' ad Oggetto non cospirante all' Oggetto generale.

§. 24. V. Se ogni parte d' ogni Ente Ordinato à il suo oggetto particolare, e dalla convergenza, e cospirazione di questi risulta l'Oggetto Generale del Tutto Ordinato; dovrem dire, che in ogni Ente Ordinato ogni minima parte sia così all' Ordine necessaria, che mancando,

per

per ipotesi, manchi l' Ordine stesso; se dunque un Ordin' esiste nell' Universo, dovrem confessare, che ogni minima sua produzione abbia il suo oggetto cospirante, e contribuente all'Oggetto Generale; e perciò, che non esista, nè si produchi cosa in natura disprezzabile, come gli sciocchi si persuadono, è superflua.

§. 25. *Il Minimo Possibile,* *cioè* *Usare il Minimo Possibile de' mezzi nel conseguir l' Oggetto è dell' essenza dell' Ordine.*

I. Se deve l' Ordine provvenire dalla più esatta, e raffinata dimostrazione dell' Ente Ordinante (§ 12), manca ove sia quella mancante; ma non può non esser quella mancante, ove adopri mezzi maggiori de' necessarj; questi dunque escludono l' Ordine; e perciò dov'è l' Ordine à luogo il Minimo Possibile.

II. Questi mezzi non necessarj non sarebbero, che parti del Tutto, e sarebbero tali, nell'ipotesi, da poter il Tutto ottener l' Oggetto anche senza la di loro in-

influenza; sarebber dunque fuori della combinazione, che al Tutto proccura l' Oggetto, fuori della cospirazione, fuori del nesso, fuori dell' Unità, fuori dell' Ordine (§ 19), dov'è dunque l'Ordine à luogo il Minimo Possibile.

III. In ogni Ente Ordinato ogni minima parte è così all'Ordine necessaria, che mancando, manca l'Ordine stesso (§ pr.); dov'è dunque l'Ordine non posson esser parti superflue; e perciò usare il Minimo Possibile de'mezzi nel conseguir l'Oggetto è dell'essenza dell'Ordine.

COROLLARIO.

§. 26. Il Minimo dunque Possibile è conseguenza dell' Unità, poichè quella parte, che fa nel Tutto da mezzo non necessario è come intrusa nella combinazione, nella cospirazione, nel nesso, nell' Unità, ma realmente è sciolta da essa; potendo la combinazione, nell' ipotesi, proccurare al Tutto l' Oggetto senza di essa.

§. 27.

§. 27. *La Parte Principale,*
cioè,

E' dell' essenza dell' Ordine, che sia nel Tutto una sua parte così disposta, che abbiano seco le altre tutte rapporto, ed attacco; onde resta quella detta Parte Principale.

I. E' necessario in un Tutto, per esser ordinato, che le sue parti abbian seco rapporto, ed attacco (§20); ma per dar luogo ad un tal rapporto, ed attacco senza offendere il Minimo Possibile, ch' è del pari all' Ordine essenziale (§25) è necessario, che sia in esso una sua Parte così disposta, che abbiano seco le altre tutte rapporto, ed attacco; perchè così ciascuna in quella avrà rapporto, e sarà ligat' all'altre tutte col minimo de'rapporti, col minimo de'ligami; è dunque dell' essenza dell'Ordine, che sia nel Tutto la Parte Principale.

II. E' dell' essenza d' ogni ente ordinato, che delle sue parti cospirino le tendenze, le direzioni, le forze (§ 19), gli Oggetti particolari (§21); ma non può darsi sì fatta cospirazione senz' ammet-

metterſi un punto, in cui convergendo convengano le tendenze, le direzioni, le forze, gli Oggetti particolari; cioè ſenz'ammettere nel Tutto una Parte, che queſte annodi, ed allacci, e così faccia delle parti un Tutto, e renda le tendenze, le direzioni, le forze, e gli oggetti particolari di eſſe, che diviſi non baſtavano, uniti ſufficienti ad ottener l' Oggetto Generale; è dunque dell' eſſenza dell'Ordine il comprendere la Parte Principale.

III. E' certamente non ſolo eſſenziale, ma l' eſsenza iſteſsa di ogni ente quell' attributo, da cui gli altri tutti derivano; ma reſterà a ſuo luogo dimoſtrato, che ammeſso in un piano, in un ſolido un punto, con cui le parti tutte umogenee abbiano lo ſteſso rapporto, ed attacco, tutt' in quel piano, in quel ſolido ſi veggan riſplendere i caratteri, e gli attributi dell' Ordine, e della Regolarità (a); è dunque il comprendere un punto sì fatto l' eſsenza iſteſsa dell' Ordine, e della Regolarità; ed è perciò non ſolo

(a) Si vegga il Capo VII.

lo essenziale, ma l' essenza istessa dell' Ordine il comprendere la Parte Principale.

§. 28. Nè vale il dire, che possan più part'insiem' esser in luogo della Parte Principale, e disimpegnarne le funzioni con maggior energia; poichè questo importarebbe certamente una combinazione aliena dall' Ordine, e dalla Regolarità; giacchè la cospirazione, la convergenza madre dell'Unità, figlia dell'Ordine (§ 19) non puote aver luogo, senza darsi un punto, in cui convergendo convengano le tendenze, le direzioni, le forze; e così vedesi di fatto avvenire ne' Piani, e Solidi Ordinati, e Regolari; ed il Minimo Possibile all' Ordine parimenti essenziale (§ 25) diametralment' esclude, che sia fatto per più, ciocchè può farsi per uno.

COROLLARJ.

§. 29. I. Viddimo esser figlio della cognizione dell' Ordine il discernere qual forma di Governo più conveng' alla Società, per ottenerne l'Oggetto (§ 15) or vediamo, che l'Ordin' esigga, che sia nel

tutto una ſua Parte, così diſpoſta, che abbiano ſeco le altre tutte rapporto, ed attacco; dovrem dunque ſicuramente confeſſare, che fra tutte le varie forme di Governo, che poſſono aver luogo nella Società, la ſola Monarchica ſia analog' all' Ordine, ed alla Regolarità; e perciò quella, che rende la Società più adattat' a conſeguirne l' Oggetto. E' ſtata dunque la ragione, e non l' intereſſe de' Preti, come a lor modo cianciano i Republicani, che à iſtallat' i Monarchi ne' cardini delle Società Ordinate; riconoſciamo perciò, e riſpettiamo nel Monarca, ponendo da banda, quanto Queſto ſerba di Sacro, le ſue ben alte, e ſtabili radici, colle quali poggia nell' Ordine ſteſſo del Tutto.

§. 30. II. Se d' ogni Tutto Ordinato è l'Ordine quello, che ne annoda le parti, e con tal ligame, che modificandone le tendenze le forze inſorga nel Tutto quel momento, ch'è ſol'opportuno a conſeguirne l'Oggetto (§ 21); e ſe l'Ordin' è quello, che induce nella Società il Siſtema Monarchico; ſarà l'Ordine quello, che ne liga le parti, e ne ſarà il legame

me quello, che lo rende opportuno all' Oggetto; sarà dunque un tal ligame così mirabilmente contesto, che modificando le forze, le voglie de' membri tutti della Società, distribuisca con tanto proporzionato equilibrio tra la Parte Principale, e le altre tutte, cioè, tra il Sovrano, ed i vassalli tutti, i dirit' i doveri, che induca l' esercizio, e l' adempimento di questi nella Società quella comune armonia, tranquillità, salvezza, in cui solo ne risiede l'Oggetto. Il crederci dunque sciolti da questi tanto sacri doveri invece di produrre il nostro bene, c' inabilita a conseguirlo; ed il praticarne, e procurarne l' adempimento invece di riuscire a noi, ed agli altri gravoso, proccura il comun bene, la comune tranquillità, la comune salvezza.

§. 31. III. E' l'Ordine dunque quell' opera della Divinità più agli occhi nostri brillante, che ci sollev' a riconoscere, e venerare un Ente Supremo sommamente Savio, sommamente Potente Autor dell'Ordine dell'Universo (§ 11) a riconoscere in noi stessi un principio pensante, in cui troviamo da quell' Ente i-

 stesso

ſteſſo Benefico impreſſa l'imagine della ſua Intelligenza, riconoſcendoci capaci d'intendere, e di produr l'Ordine (§ 12); e ci ſolleva in fine a conoſcere la neceſſità di avere nella Società, per poter eſſere ordinata, un Principe, a cui reſti dall'Ordine ſteſſo commeſſo il manubrio dell'ordinata Macchina Sociale (in cui ſono da Quegli annodate le tendenze; le direzioni, le forze, le voglie de' membri tutti di eſſa) per reggerla, e dirigerla alla felicità.

§. 32. IV. Se uno è il fonte in cui vediamo l'eſiſtenza di un Dio, la ſpiritualità dell'anima, la baſe del Monarca; non poſſono non chiuder gli occhj della ragione (che perciò chiamano i noſtri ſavj dono de' Dei ſdegnati) anche alle prime verità quelli, che confeſſandos'indegni di quel dono, li chiudono ſciaguratamente per l'ultima. Queſto in fatti è lo ſtato de' Noſtri Repubblicani.

§. 33. V. Poichè l'eſſenza de' piani, e ſolidi Regolari la vedremo, come s'è detto, ripoſta nel comprendere un punto, con cui le parti tutte umogenee abbiano lo ſteſſo rapporto, ed attacco; conoſciamo

mo dacciò chiaramente il perchè quei piani, e solidi sansi anche detti Ordinati; e conosciamo parimente il divario, e l'eccesso della Regolarità sopra l'Ordine; l'Ordine cioè; importa, che sia nel Tutto una parte; con cui le altre tutte abbiano rapporto, ed attacco; la Regolarità esige di vantaggio, che di questi rapporti, ed attacchi quelli delle parti umogenee, cioè, della stessa specie, siano eguali.

§. 34. VI. Se tale è dunque il nesso, che passa tra l'idea dell'Ordine, e quella della Regolarità, non potrà non restare illustrata, e rettificata in noi la tanto estesa, ed astratta idea dell'Ordine (§ 17) ove sia appieno sviluppata, e fissata quella della Regolarità. Ecco perchè nel tempo appunto, in cui, nostro malgrado, si vedeva rovesciar l'Ordine, e questo dall'uomo stesso, che ne doveva essere il conoscitore, l'adoratore, ed il fabbro, si è da me ardito trattar, per la prima volta, di queste idee quanto sublimi, estese, e rispettabili, tanto utili, e necessarie; ecco perchè debba ciascuno perdonare in me l'ardita intrapresa, e per-

donare all'opera quanto esibisce di ruvido, impulito, e superfluo; perchè inseparabile dapprima da una produzione recentement'estratta dal profondo seno della Verità; ed ecco in fine il perchè debba ciascuno avidamente introdursi, e coraggiosamente inoltrarsi negli arcani della Regolarità; nell'intelligenza, che da me non ne troverà, che solo aperte le porte.

CAPO



CAPO I.

DEL SOLIDO REGOLARE IN GENERALE.

Definizioni, e nozioni preliminari.

DEFINIZIONE I.

§. 1. UN Solido dicesi Ordinato, o Regolare, se sia terminato da piani regolari, simili, ed eguali così combinati, che da egual numero degli anguli di tali piani sia compreso ogni solido suo angulo.

AVVERTIMENTO I.

§. 2. La norma della Regolarità non è, che l'Uniformità (a); quindi siccom'è regolare quel rettilineo, di cui siano uniformi, e perciò eguali i lati, e gli

(a) Si vegga il §. 4. della prefazione colla sua nota.

anguli; così è regolare quel poliedro, di cui siano uniformi, ed eguali i lati, gli anguli piani, gli anguli solidi; si conosceranno in fatti dei solidi (che saran dett' Innominati) terminati da piani regolari, simili, ed eguali e perciò uniformi nei lati, e negli anguli piani, che non son regolari, perchè non uniformi anche negli anguli solidi; un sì fatto attributo dunque non solo poteva, ma dovev' assumersi nella definizione di questi Solidi.

AVVERTIMENTO II.

§. 3. Quantunque però tanto persuada la stessa natura della Regolarità, che esclude affatto dai termini qualunque disformità; pure, perchè dallo stesso sviluppo de' Solidi Regolari si conosceranno degli anguli solid' ineguali, quantunque compresi da egual numero di anguli piani relativamente eguali, si è perciò nella definizione soltanto asserita l'esterna uniformità degli anguli solidi, e non l'eguaglianza di essi; poichè però si conoscerà di vantaggio, che non possano non esser eguali quegli anguli solidi, che sian compresi

presi da soli tre anguli piani relativament'eguali, perciò si assumerà anche l'eguaglianza degli anguli solidi solo in quei solidi Regolari, de' quali gli anguli sian compresi da soli tre anguli piani relativamente eguali, negli altri si dimostrerà.

COROLLARIO I.

§. 4. Dovendosi ogni angulo solido formar almeno da tre anguli piani, la summa de' quali fusse minore di quattro anguli retti; fu quindi giustamente dedotto, che da soli trilateri, quadrilateri, e pentilateri regolari possan terminars' i Solidi Regolari; e poichè de' trilateri regolari le summe di tre, quattro, e cinque anguli non giungono a quattro retti; de' quadrilateri e pentilateri le sole summe di tre; fu quindi ulteriormente dedotto, cinque solo esser le specie de' Solidi Regolari, tre delle quali sono terminate da trilateri, che si uniscono, o a tre, o a quattro, o a cinque in ogni angulo, e nel primo caso, in cui tali trilateri son quattro formano un Solido detto Tetraedro, o sia Piramide

mide Regolare, nel secondo, in cui son otto, formano un Solido detto Ottaedro, nel terzo, in cui son venti, un Solido detto Icosaedro, la quarta specie è terminata da sei quadrati, che formano un Solido detto Cubo, la quinta finalmente da dodici pentugoni, che formano un Solido detto Dodecaedro.

COROLLARIO II.

§. 5. Poichè ne' Solidi terminati da piani il numero de' lati è la metà del numero de' lati di tutt' i piani d'ognuno; giacchè in essi ogni lato non è, che l'interfezione di due piani, (che saran perciò detti aderenti) de' quali si dirà base comune; perciò i lati della Piramide saran sei; quelli dell' Ottaedro, e del Cubo dodici, e quelli dell' Icosaedro e Dodecaedro trenta.

COROLLARIO III.

§. 6. Così parimente, perchè per la stessa ragione il numero de' lati convenut'in ogni angulo solido eguaglia quello

lo degli anguli piani del medesimo; perciò converranno in ogni angulo solido della Piramide, del Cubo, del Dodecaedro tre lati; quattro in ogni angulo dell' Ottaedro; e cinque in fine in ogni angulo dell'Icosaedro.

DEFINIZIONE II.

§. 7. Potrà perciò dirsi nella Piramide, nel Cubo, nel Dodecaedro ogni lato insistere nel piano, che passa per gli altri due, ed all'angulo, che comprendono; ed ad ogni lato in entrambi le sue estremità insisterne altri quattro.

DEFINIZIONE III.

§. 8. Saran dett' in tutt' i Solidi Regolari anguli contigui quelli, che ànno un lato comune, che si dirà tramezzarli; quindi nella Piramide, nel Cubo, nel Dodecaedro ogni angulo ne avrà altri tre contigui; quattro ne saran contigui ad ogni angulo dell'Ottaedro; e cinque in fine ad ognuno dell'Icosaedro (§ 6).

DEFINIZIONE IV.

§. 9. Si dirà centro de' piani terminanti un Solido Regolare quello, ch' è centro del cerchio circoſcrittibile, ed iſcrittibile in eſſi; e così le rette, che l'uniſcono cogli anguli, o che da eſſo calanſi ai ſuoi lati perpendicolari ſono èguali; e ſaran dette ragi di circoſcrizione, e d' iſcrizione.

AVVERTIMENTO.

§. 10. Ne' rettilinei regolari il centro del cerchio circoſcrittibile è, come s' è ſuppoſto, lo ſteſſo, che quello dell'iſcrittibile; imperciocchè le normali calate da D (*fig.* 1.) centro del cerchio circoſcrittibile al regolare rettilineo ABC ne' ſottopoſti lati dividono queſti *bifariam*, ed eſſendo così il quadrato di ciaſcuna di eſſe la differenza de' quadrati fatti in uno degli eguali ragi di circoſcrizione, ed in uno degli eguali ſemilati, ſono eguali.

COROLLARIO I.

§. 11. Poichè ne' rettilinei regolari le perpendiculari calate dal centro ne' sottoposti lati, cioè i di loro ragi d'iscrizione, ne incontrano il punto medio di essi; perciò 1.°, facendo lo stesso le altezze tanto nel triangulo equilatere, quanto nel pentagono regolare, passaranno queste pel centro, e non saranno, che l'aggregato del ragio di circoscrizione, e d'iscrizione del rettilineo rispettivo: 2.° le rette, che in essi uniscono il centro co' punti medii de' lati sono a questi perpendiculari, e sono eguali.

COROLLARIO II.

§. 12. Poichè agli eguali, e simili rettilinei regolari sono circoscrittibili, ed iscrittibili eguali cerchj; perciò 1.° de' rettilinei regolari terminanti un Solido regolare saranno egual'i ragi di circoscrizione, e d'iscrizione. 2.° degli eguali pentagoni regolari saran eguali le altezze (§ pr)

CO-

COROLLARIO III.

§. 13. Poichè ne' simili rettilinei regolari i trianguli BDE CEF (*fig.* 1. *e* 2.) che fanno ne' semilati di essi i rispettivi ragi di circoscrizione, e d' iscrizione, sono equianguli, avendo gli anguli in E, ed F retti, e quelli in B e C eguali, perchè la metà di quelli de' rettilinei stessi; saran perciò in essi, come i lati i ragi di circoscrizione, e d' iscrizione.

DEFINIZIONE V.

§. 14. Sarà detta corda di un Solido Regolare la retta, che unisce in esso due centri di due suoi piani aderenti.

COROLLARIO.

§. 15. Quindi, perchè ne' Solidi terminati da piani ogni piano a tanti ne aderisce, quanti sono i suoi lati (§ 5); si avrà perciò il numero delle corde, che possono aver luogo in un Solido Regolare dalla metà del prodotto dal numero de'

suoi

ſuoi piani in quello de' lati di uno di eſſi; ſicchè in ognuno eguaglieranno il numero de' lati, che dallo ſteſſo calcolo ſi ottiene (§ 5). E perciò ſaran queſte ſei nella Piramide, 12. nell'Ottaedro, e nel Cubo, 30. nel Dodecaedro, ed Icoſaedro.

DEFINIZIONE VI.

§. 16. In un Solido Regolare ſe ne dirà iſcritto un altro, ſe abbia queſto tutt'i ſuoi angul'in tutti i piani di quello, che ſe li dirà circoſcritto.

DEFINIZIONE VII.

§. 17. Sarà detto centro di un Solido Regolare quel punto, che ſarà in ciaſcun di eſſi dimoſtrato equidiſtante dagli anguli, dai piani, e dai lati dello ſteſſo; e ſarà perciò detta ſemiaſſe di circoſcrizione quella retta, che uniſce quel punto con uno de' ſuoi anguli, perchè ſemiaſſe della ſfera allo ſteſſo ſolido circoſcrittibile; e ſemidiametro d'iſcrizione (per diſtinguerla dal ſemiaſſe anche ſenza l'aggiunta) quella, che da eſſo calaſi

lasi ad uno de' suoi piani normale; perchè semidiametro della sfera allo stesso iscrittibile.

DEFINIZIONE VIII.

§. 18. Il rettilineo, che danno in un Solido gli uniti estremi de' lati convenuti nello stesso solido angulo di esso, si dirà per rapporto del Solido *interno*, potendo meritar il nome di esterno ogni rettilineo terminante il solido stesso; e si dirà *sottoposto* per rapporto dell' angulo stesso del solido, cui è sottomesso.

AVVERTIMENTO I.

§. 19. Quantunque gl' interni rettilinei de' Solidi Regolari siano, a suo luogo, dimostrati piani regolari, pure per ora con tal nome di rettilineo non dev' intendersi un piano rettilineo, ma un anulare congiungimento di rette.

COROLLARIO I.

§. 20. Ne' solidi terminati da trianguli sono i lati stessi del Solido, ch' esibiscono

ſcono gl' interni di loro rettilinei, negli altri ſon le ſottefe agli anguli piani terminanti lo ſteſs'angulo del Solido.

COROLLARIO II.

§. 21. In sì fatti rettilinei dunque il numero de' lati eguaglierà quello degli anguli piani comprendenti l' angulo ſolido, cui ſon ſottopoſti; e perciò quadrilatere ſarà ogn'interno rettilineo dell'Ottaedro, triangulo ognuno del Cubo, e del Dodecaedro, pentilatere in fine ognun dell' Icoſaedro; nella Priramide poi gli eſterni ſono anche in luogo d' interni rettilinei. E così per l' oppoſto ſi avrà il numero degli anguli piani, che comprendono un angulo ſolido dal numero de'lati del ſuo ſottopoſto rettilineo.

COROLLARIO III.

§. 22. Nel Cubo, e Dodecaedro gl'interni rettilinei, perchè triangolari (§ pr) ſon piani rettilinei.

AVVERTIMENTO II.

§. 23. Gli anguli di sì fatti rettilinei passando per gli estremi de' lati del Solido, saranno negli anguli stessi del Solido, e negli Ottaedri ed Icosaedri, perchè terminati da trianguli, saranno ivi compresi dai lati stessi del Solido (§ 20); da quelli però, che non appartengono allo stess'angulo degli esterni piani di esso.

DEFINIZIONE IX.

§. 24. In ciascun Solido Regolare comprendente interni rettilinei, si diranno angulari piramidi quelle, che sono esibite da ciascun di loro angulo solido col sottopostogli rettilineo; queste perciò saranno triangulari nel Cubo, e Dodecaedro, quadrilateri nell'Ottaedro, e pentilateri nell' Icosaedro: dal che ogn'interno rettilineo del Solido Regolare sarà anche detto base dell'angulare piramide, che taglia dal Solido.

DE-

DEFINIZIONE X.

§. 25. Si dirà equilatere quel Solido, di cui i lati ſian tutti retti eguali.

COROLLARIO I.

§. 26. Del Solido equilatere ſono i piani aſſolutamente e relativamente equilateri.

COROLLARIO II.

§. 27. I Solidi Regolari ſon tutti equilateri (§ 1).

PROPOSIZIONE.

§. 28. *Son tutti aſſolutamente e relativamente equilateri gl' interni rettilinei d' ogni Solido Regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I piani terminanti qualunque Solido Regolare ſon tutti regolari, ſimili, ed eguali (§ 1); dovendo dunque ne' ſolidi

anguli d' ogni Solido Regolare convenir gli anguli di sì fatti rettilinei, saranno tutt' eguali le sottese a questi anguli; e perciò saran tutti assolutamente e relativamente equilateri gl' interni rettilinei d' ogni Solido Regolare. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 29. Gl' interni rettilinei del Cubo, e Dodecaedro sono non solo in un piano (§ 23); ma regolari, ed eguali.

COROLLARIO II.

§. 30. Le angulari piramidi dello stesso Cubo, o dello stesso Dodecaedro son simili, ed eguali; e solo simili quelle de' Cubi, o Dodecaedri di lati ineguali.

CAPO



CAPO II.

Della Piramide Regolare.

DEFINIZIONE I.

§. 31. LA Piramide Regolare (che sarà spesso disegnata col solo nome di Piramide) è quel Solido Regolare terminato da quattro trianguli, e perciò regolari, ed eguali, così disposti, che in ogni suo angulo solido convengano tre anguli de' suoi trianguli; meriterà dunque tal nome quella Piramide triangulare, i di cui trianguli sono equilateri.

DEFINIZIONE II.

§. 32. Sarà detta asse della Piramide quella retta, che unisce il vertice d'un suo angulo col centro del triangulo opposto; dal che non saranno, che quattro gli assi della Piramide.

DEFINIZIONE III.

§. 33. Ogni retta, che unisce i punti medii di due lati convenuti nello stess'angulo della Piramide sarà detta Ottaedrale.

PROPOSIZIONE I.

§. 34. *Nella Piramide gli assi sono ai suoi piani normali, e sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 1. Nella Piramide ABCD sia calato l'asse AE, e sia il centro E unito ai punti B C D.

I. I trianguli AEB AEC AED come fatti dal comune AE da tre lati della stessa piramide, e tre raggi dello stesso triangulo son relativamente equilateri, e perciò anche relativamente equianguli; eguali son dunque i diloro anguli in E opposti agli eguali lati; e perciò l' asse AE è normale al sottoposto triangulo; locchè avendo sempre luogo, saranno nella Piramide gli assi ai suoi piani normali.

II.

II. Dal che il quadrato d'ogni asse della Piramide è la differenza de'quadrati di un suo lato, e di un suo ragio triangulare di circoscrizione; ma sono in essa eguali i primi, ed i secondi (§ 12); dunque gli assi nella Piramide sono ai suoi piani normali, e sono eguali. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 35. Nelle Piramidi Regolari le altezze sono lo stesso, che gli assi; ma nelle Piramidi simili, e similmente poste, come sempre son le Piramidi Regolari, le altezze son come i lati; dunque sono nelle Piramidi Regolari gli assi, come i lati.

COROLLARIO II.

§. 36. I trianguli dunque, che nascono sia nella stessa, sia in diverse Piramidi Regolari tra un asse, un lato, e'l ragio corrispondente son terminati da lati proporzionali (§ 13), e perciò saranno nelle Piramidi eguali gli anguli, che nascono in esse tra gli assi, ed i lati assolutamente, e relativamente.

LEMMA I.

§. 37. *Nel triangulo equilatere il ragio di circoscrizione è a quello d'iscrizione, come 2 : 1.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 1. Sia D centro del triangulo equilatere ABC, e sia in questo calata l'altezza AE, la quale passerà per D (§ 12), e siano in fine uniti i punti DB DC.

Essendo per ipotesi D centro del triangulo ABC; saranno i trianguli ADB BDC CDA relativamente equilateri, e perciò eguali; sarà dunque l'intero triangulo ABC alla sua parte BDC come 3 : 1.; ma ànnò questi la stessa base; sarà dunque anche l'altezza del primo a quella del secondo, cioè AE a DE come 3 : 1., e perciò AD : DE, cioè il ragio di circoscrizione a quello d'iscrizione (§ 11) come 2 : 1. C. D. D.

CO-

COROLLARIO.

§. 38. Nel triangulo dunque equilatere l'altezza ſta al ragio di circoſcrizione, come 3 : 2, a quello d'iſcrizione, come 3 : 1.

LEMMA II.

§. 39. *Nella Piramide ogni corda è parallella ad un ſuo lato, ed è la terza parte del medeſimo.*

DIMOSTRAZIONE.

Nella Piramide ABCD ſia tirata la corda qualunque EF, e dagli anguli BC oppoſti ai piani, de' quali quella corda uniſce i centri nel lato AD, che quelli ſteſſi piani tramezza ſiano calate due perpendiculari, queſte dovranno convenire nel ſuo punto medio M (§ 11), e paſſare per gli riſpettivi centri. Fig. 3.

I. Nel triangulo BMC la corda EF ne à diviſi i lati BM CM proporzionatamente (§ 37); è dunque parallell'a BC.

II. E così ſarà BC : EF : : BM : ME;

ma

ma BM : ME : : 3 : 1 (§ pr.) dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 40. Nella Piramide le corde son tutt' eguali, e sono nelle Piramidi le corde, come i lati.

COROLLARIO II.

Fig. 4. §. 41. Se nella Piramide ABCD si uniscano tre centri de' suoi trianguli E F G si avrà un triangulo equilatere EFG ; e così, perchè equilateri anche saranno, per la stessa ragione i trianguli, che formano ne' lati di questo le altre tre corde, che tiransi dal quarto centro H agli stessi centri E F G, agli anguli, cioè, del primo triangulo ; perciò, tirate nella Piramide tutte le corde, nascerà in essa un altra regolare Piramide, che avendo tutt' i suoi anguli in tutt' i piani di quella, meriterà dirs' iscritta in essa ; e sarà alla stessa, come i Cubi di 1 : 3.

AV-

AVVERTIMENTO.

§. 42. Di due rette parallelle posson distinguersi gli estremi corrispondenti, e gli estremi alterni; i primi son quelli, che unitisi con altre rette, formasi da queste colle parallelle un piano quadrilineo; i secondi son quelli, le rette de' quali sono le diagonali di un sì nato quadrilineo; quindi poichè le diagonali di qualunque piano quadrilineo s' intersegano; sarà vero, che le rette, che uniscono gli estremi alterni di due parallelle debbano intersegarsi.

PROPOSIZIONE II.

§. 43. *Nella Piramide gli assi s' intersegano nel medesimo punto, ed è questo il suo centro.*

DIMOSTRAZIONE.

Nella Piramide ABCD siano tirati gli assi BF CE, e la corda EF. Fig. 1.

I. Essendo la corda EF parallell'a BC (§ 39)

(§ 39), ed unendo gli estremi alterni di queste gli assi BF CE, dovranno questi intersegars'in un punto O (§ prec.), e dovranno così formare in BC, ed EF i trianguli BOC EOF equianguli; sicchè sarà tanto BO ad OF, quanto CO ad OE, come il lato BC alla corda EF; ma per la stessa ragione deve lo stesso asse BF non solo intersegarsi cogli altri due assi, che calansi dagli altri due anguli A D, ma deve bensì restare in ciascuno la parte verticale a quella verso il piano, come il lato alla corda della stessa piramide; nella Piramide dunque tutti gli assi s' intersegano nel medesimo punto.

II. Essendo nella Piramide gli assi eguali, ed ai rispettivi piani normali(§ 34), e dividendosi così tutt'in O, che ne resti ogni segmento verticale all' altro verso il piano, come il lato alla corda; sarà quel punto, in cui gli assi s'intersegano equidistante dagli anguli, e dai piani; ma equidista parimente dai lati, imperciocchè calata su qualunque lato BC la perpendiculare ON, questa dovrà incontrarne il punto medio N, essendo OBC isoscele, e dovrà così il quadrato di essa, o di

ogni

ogni altra simile, eguagliar la differenza de' quadrati di un egual semiasse di circoscrizione, e di un egual semilato; il punto dunque, in cui gli assi s' interse-gano è il centro della Piramide, e perciò &c. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§.44. Nella figura additata nel piano si scorgerà poco volentieri la necessità di doversi BF intersegare anche cogli altri due assi calati dagli altri due anguli A D; ma questo si deduce francamente dal riflettere, ch' essendo nella Piramide quattro gli anguli, ed avendone ognuno altri tre contigui, e così quattro i piani, ed avendone ognuno altri tre aderenti, due qualunque assi della Piramide abbiano sempre ne' di loro estremi verticali un lato comune, negli altri verso i piani una corda a quel lato parallella.

COROLLARIO I.

§. 45. Avendo veduto BO : OF : : BC : EF, sarà nella Piramide il semiasse

al

al semidiametro, come il lato alla corda, cioè, come 3 : 1 (§ 39); e sarà perciò la sfera circoscritt' all' iscritt' alla stessa Piramide, come i Cubi di 3 : 1 (§ 17).

COROLLARIO II.

§. 46. Sicchè nelle Piramidi Regolari gli assi passan pel centro, e restan da esso divisi in un semiasse, ed un semidiametro; e sta ogni asse al primo come 4 : 3, al secondo, come 4 : 1; e perciò sarà l' asse della Piramide a quello della Sfera circoscrittali, come 4 : 6 = 2 : 3 a quello della sfera iscrittali, come 4 : 2 = 2 : 1.

COROLLARIO III.

§. 47. La Sfera iscritta nella Piramide incontra i suoi piani tutti nel centro; e così circoscrive nel tempo stesso la piramide in quella iscritta, cioè che nasce in essa tirate le sue corde (§ 41); sarà dunque la Piramide circoscritta all'iscritta alla stessa sfera, come la Sfera circoscritt' all' iscritt' alla stessa piramide (§ 45); e saranno quell' e queste tra loro, come i Cubi di 3 : 1 = 27 : 1 (§ 41).

CO-

COROLLARIO IV.

§. 48. Essendo nelle Piramidi tutt' i trianguli nati, come BOC da due semiassi, ed un lato corrispondente equianguli, avendo ognuno due anguli nati dall' insistenza degli assi ne'rispettivi lati(§ 36); saranno nelle Piramidi, come i lati i semiassi; ma son come i lati gl'interi assi; saranno dunque anche, come i lati i semidiametri; e perciò saranno le Piramidi, come le Sfere circoscritte, ed iscritte in esse (§ 17).

COROLLARIO V.

§. 49. Incontrando le perpendiculari, calate dal centro della Piramide nei suoi lati, questi tutti nei di loro punti medii; sarà nella Piramide il centro da questi punti equidistante.

AVVERTIMENTO.

§. 50. Siccome ne' trianguli equilateri il centro ne divide l'altezza ne'ragi del

cerchio

cerchio circoscrittibile, ed iscrittibile in esso; così nelle Piramidi Regolari il centro ne divide le altezze ne' ragi della sfera circoscrittibile, ed iscrittibile in essa.

PROPOSIZIONE III.

§. 51. *Nella Piramide il quadrato del lato è a quello dell' asse, come* 3 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 2. Nella Piramide ABCD sia calato l'asse AE, e dai punti AE siano calate su lo stesso CD due perpendiculari, queste dovendo entrambi dividere bifariam CD (§ 11), converranno nel suo punto medio F.

Per la costruzione ADq = AFq + FDq; ma ADq : DFq : : 4 : 1; dunque ADq : AF : : 4 : 3 = 12 : 9; ma egualiando per la stessa costruzione AFq i quadrati di AE, ed EF (§ 34), ed essendo AFq : FEq : : 9 : 1, (§ 38) sarà AFq : AEq : : 9 : 8; dunque il quadrato del lato AD è al quadrato dell' asse AE, come 12 : 8 = 3 : 2. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 52. Se il quadrato del lato è a quello dell' asse come 3 : 2 = 24 : 16; quello dell'asse a quello del semiasse di circoscrizione come 16 : 9 (§ 46); sarà nella Piramide il quadrato del lato a quello del semiasse di circoscrizione, cioè a quello del ragio della Sfera ad essa circoscrittibile (§ 17) come 24 : 9 = 8 : 3; potrà dunque dirs' il lato della Piramide maggior del ragio della Sfera circoscrittibile ad essa.

COROLLARIO II.

§. 53. Se sta il quadrato del lato a quello del semiasse di circoscrizione, come 8 : 3 (§ pr.) sarà a quello dell'intero asse di circoscrizione come 8 : 12 = 2 : 3; dal che sarà nella Piramide il lato media proporzionale tra l' asse suo, e quello della sfera circoscrittali, siccome cioè il lato del triangulo equilatere è media proporzionale tra la sua altezza, e 'l diametro del cerchio circoscrittoli.

COROLLARIO III.

§. 54. Se stà il quadrato del lato a quello dell'asse, come 3 : 2 = 24 : 16, quello dell'asse a quello del semidiametro d'iscrizione come 16 : 1 (§ 46); sarà quello del lato a quello del semidiametro, come 24 : 1; e perciò sarà a quello dell'intero diametro, come 24 : 4 = 6 : 1.

LEMMA.

§. 55. *Nella Piramide ogni Ottaedrale è la metà del suo lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 5. Nella Piramide ABCD sia tirata l'Ottaedrale EF.

Questa tagliando i lati AB AC del triangulo ABC proporzionalmente (§ 33) sarà parallell'a BC, e così tagliarà dal triangulo ABC l'altro simile AEF; sarà dunque la ottaedrale EF eguale ad AE metà del lato della Piramide. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 56. Le Ottaedrali son tutt'eguali; e perciò quelle, che unifcono i punti medii de' lati appartenenti allo fteſs'angulo A della Piramide chiudono un triangulo equilatere, EFG, il quale terminandofi da lati parallelli a BC CD DB farà parallello al triangulo della Piramide BCD, e perciò tagliarà da effa un' altra piramidetta, che diraffi angulare, a quella fimile, e perciò regolare, e l'ottava fua parte.

COROLLARIO II.

§. 57. Equilatère parimente farà quel triangulo, che chiudono quelle Ottaedrali, che unifcono i punti medii E F H de'lati dello fteffo triangulo ABC della Piramide.

COROLLARIO III.

§. 58. Tirate dunque nella Piramide tutte le Ottaedrali vengon quefte a tagliar da effa quattro regolari, ed eguali piramidette angulari, che in tutto compren-

dono la metà della sua solidità (§ 56); e così viene a restar l'altra metà di essa in un solido terminato da otto eguali, e regolari trianguli, quattro nati sotto i quattro suoi anguli, e quattro ne' quattro suoi piani.

PROPOSIZIONE IV.

§. 59. *Il Solido, che nasce nella Piramide, tirate in essa tutte le Ottaedrali è un Ottaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nella Piramide le Ottaedrali, e così tagliatesi da essa le sue angulari piramidette, resta di essa un Solido terminato da otto regolari, ed eguali trianguli (§ prec.); ma son questi così disposti, che in sei punti (quanti, cioè, sono i lati della Piramide, gli anguli dell'Ottaedro) poggino i diloro anguli, ed in ogni punto ne convengano quattro; due, cioè, di quelli nati sotto gli anguli, che ogni lato tramezza (§ 8); e due in quei piani, ai quali ogni lato appartiene(§ 5);

tirate dunque nella Piramide le Ottaedrali, il Solido, che nasce in essa è un Ottaedro, C. D. D.

COROLLARIO.

§. 60. La Piramide sta all' Ottaedro, che così nasce in essa, come 2 : 1 (§ 58).

PROPOSIZIONE V.

§. 61. *La Piramide sta all'Ottaedro di lati eguali, come* 1 : 4.

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nella Piramide le Ottaedrali nascon da esse, e perciò di lati eguali, le regolari piramidette angulari, l'Ottaedro (§ 59); ma ciascuna di quelle sta alla Piramide intera, come 1 : 8 (§ 56); la Piramide intera a quell' Ottaedro, come 8 : 4 (§ pr.); la Piramide dunque sta all'Ottaedro di lati eguali, come 1 : 4. C. D. D.



CAPO III.

Dell' Ottaedro.

DEFINIZIONE I.

§. 62. L'Ottaedro è quel Solido Regolare terminato da otto trianguli, e perciò regolari, ed eguali, così combinati, che da quattro de' di loro anguli si comprenda ogni solido suo angulo.

COROLLARIO.

§. 63. Gli anguli solidi dell' Ottaedro son sei, essendo ventiquattro i suoi anguli piani.

AVVERTIMENTO.

§. 64. Quantunque sian sei gli anguli solidi dell' Ottaedro, gl' interni suoi quadrilinei non sono, che tre, essendone

ognun

ognun sottoposto a due de' suoi anguli, che si diranno opposti.

DEFINIZIONE II.

§. 65. Lati opposti nell' Ottaedro si diran quelli, che sono opposti negli interni suoi quadrilinei.

AVVERTIMENTO.

§. 66. Poichè nell' Ottaedro si mostreran parallell' i lati opposti, potranno in essi notarsi gli estremi corrispondenti, ed alterni; e potran perciò dirs' in esso

DEFINIZIONE III.

§. 67. Anguli opposti quelli, ne' quali sono gli estremi alterni de' lati opposti.

COROLLARIO.

§. 68. Nell' Ottaedro a due suoi anguli contigui debbon opporsene altri due anche contigui, ed esser oppost' i lati, che li tramezzano; e così parimente a

tre suoi anguli annularmente contigui, quali son quelli, ne' quali son gli anguli dello stesso triangulo, debbon opporsene altri tre anche annularmente contigui, cioè ne' quali anche sian gli anguli d'un istesso triangulo, ed i lati del primo triangulo debbon opporsi a quelli del secondo; onde potran dirsi nell' Ottaedro

DEFINIZIONE IV.

§. *69*. **Trianguli opposti**, quelli, che son terminati da lati relativamente opposti.

DEFINIZIONE V.

§. 70. **Assi** nell' Ottaedro son le rette, che uniscono due suoi anguli opposti.

COROLLARIO I.

§. 71. Gli assi nell' Ottaedro uniscono gli estremi alterni de' suoi lati opposti, e perciò non sono, che le diagonali degli interni suoi quadrilinei (§. 65).

COROLLARIO II.

§.72. Essendo nell'Ottaedro sei i suoi anguli (§ 63), ed avendone ognuno quattro contigui (§ 8), e perciò non altro, che uno opposto; saranno nell'Ottaedro tre sol' i suoi assi.

COROLLARIO III.

§. 73. Ma ne' tre quadrilinei dell'Ottaedro dovrebbero aver luogo sei diagonali; è necessario dunque, che nell'Ottaedro i suoi quadrilinei si seghino per le diagonali, onde resti ogni diagonale a due di essi comune; e così tre assi occupino il luogo di sei diagonali.

PROPOSIZIONE I.

§. 74. *L'Ottaedro comprende un punto equidistante dagli anguli, dai piani, dai lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 6. Sia ABCD un quadrato, ed in esso sian tirate le diagonali AC BD, e dal punto O, in cui queste s'intersegano sia eretta la normale OE eguale alla semidiagonale OA, e sia in fine unito il punto E co' punti A B C D.

Il quadrato di AE eguagliando per la costruzione gli eguali quadrati di AO EO, sarà il doppio del quadrato di AO; ma è doppio dello stesso, per la stessa costruzione il quadrato di AB; dunque AE è eguale ad AB; nella stessa maniera si mostra BE CE DE eguale alla stessa AB; dunque son tutti egual' i lati della quadrata piramide EABCD, e perciò ne sono i trianguli tutti equilateri, ed eguali; se dunque si ripeta al disotto dello stesso quadrato ABCD la stessa costruzione si vedrà sorgere un Solido terminato da otto eguali trianguli equilateri così combinati, che da quattro anguli di questi sia compres'ogni angulo del Solido; si vedrà dunque sorgere un Ottaedro, nel quale il punto O, in cui le diagonali

del quadrato ABCD s'interſegano è quello, che ſi moſtrerà equidiſtante dagli anguli, dai piani, dai lati.

I. Eſſendo nel quadrato eguali le diagonali, ed interſegandoſi *bifariam*; ſarà il punto O equidiſtante dai quattro anguli A B C D; ma lo è egualmente diſtante per la ſteſſa coſtruzione dagli altri due; lo è dunque dagli anguli tutti.

II. Se queſto ſteſſo punto ſi creda unito co' centri de' trianguli tutti dell' Ottaedro, ſi troverà ciaſcuna di sì fatte rette al ſuo riſpettivo piano normale, come nel (§. 34); e così ſi vedrà, che ſia il quadrato di ognuna di eſſe la differenza de' quadrati fatti in uno degli eguali ſemiaſſi di circoſcrizione, ed in uno degli eguali ragi triangulari di circoſcrizione, ſi vedranno dunque tutte sì fatte normali eguali; e perciò quel punto, in cui quelle diagonali s'interſegano equidiſta anche dai piani tutti dell' Ottaedro.

III. Ma ſe lo ſteſſo punto, ſi creda unito co' punti medii dei lati dell' Ottaedro, ſi troverà ciaſcuna di sì fatte rette al corriſpondente lato perpendiculare,

re, e la differenza de' quadrati di uno degli eguali semiassi, e di uno degli eguali semilati dell'Ottaedro; l'Ottaedro dunque comprende un punto equidistante dai suoi angoli, dai piani, dai lati. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 75. Lo stesso può mostrarsi nell'Ottaedro, che nasce nella Piramide dalle Ottaedrali; giacchè racchiude questo il centro della Piramide, ch' equidistando dai punti medii de' suoi lati (§ 49) equidista dagli angoli dell'Ottaedro; e quindi siegue il resto, come nella precedente.

COROLLARIO I.

§. 76. L'Ottaedro è circoscrittibile, ed iscrittibile alla Sfera.

COROLLARIO II.

§. 77. La Sfera, che s'iscrive nell'Ottaedro incontra i suoi piani tutti nel centro.

CO-

COROLLARIO III.

§. 78. Se l'Ottaedro, che nasce nella Piramide dalle Ottaedrali à comune con quella il suo centro, comuni quattro centri de' piani, sarà quello circoscrittibile alla stessa Sfera, che questa.

LEMMA I.

§. 79. Se ad una Sfera, che tocca un piano si faccia una sezione al piano parallella, tutte le rotte, che tiransi dal punto del contatto alla periferia della sezione sono eguali.

DIMOSTRAZIONE.

Nella Sfera ABC, che tocca il piano MN nel punto B sia fatta la sezione ADC parallella ad MN. Si unisch' il punto B con O centro della Sfera, e si prolunghi BO, se sia necessario, finchè incontri il piano della sezione in P. Si prendano finalmente nella periferia della sezione ad arbitrio quali si vogliano punti Fig. 7.

ADC,

A D C, e si uniscano con B, e P.

Essendo PB normale ad MN sarà parimente normale al piano della sezione, ch'è parallello per la costruzione ad MN; dunque i trianguli APB DPB CPB son rettangul' in P, e perciò sono egual' i quadrati, e così le rette AB DB CB, com' eguali alle eguali summe de' quadrati di AP PB, DP PB, CP PB; e perchè va lo stesso di tutte le altre, che posson tirarsi da B agli altri punti della periferia ADC, sarà sempre vero ciocchè. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 80. Una retta si dirà adattata nella Sfera, se pogg' in essa i suoi estremi.

LEMMA II.

§. 81. *Se qualunque numero di rett' eguali siano così adattate in una Sfera, ch' ne siano convenuti gli estremi di una banda in un punto, gli estremi opposti saranno nella periferia della stessa sua sezione.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Nella Sfera ABC sia adattato qualunque numero di rett' eguali convenute da una banda in qualunque suo punto B. Si faccia collo stesso punto poggiar la Sfera sul piano MN; e si faccia dal punto A, in cui qualunque delle rette adattate poggia l'altro estremo una sezione ADC parallell'ad MN; nella periferia di questa si troveranno tutti gli altri estremi delle rette adattate. Fig. 7.

Negandosi, ne cada una, se sia possibile, nel punto X al di sopra di detta periferia, e si unischi XQ; pel piano del triangulo BXQ si faccia una seconda sezione, che taglia la prima ADC in YZ, e si unischi BY; ciò fatto, la Sezione BXQ passando per BQ diametro della Sfera, sarà un suo cerchio massimo, di cui perciò sarà diametro la stessa BQ, e l'altre due BX BY due sue qualunque secanti nello stesso semicerchio, e perciò una più, l'altra meno vicin'al diametro; saranno dunque ineguali; ma BX essendo per l'ipotesi eguale a BA sarebbe anche eguale

eguale a BY (§ pr); è falso dunque, che sia il punto X al di sopra della periferia ADC; ma lo stesso va detto, facendolo cadere al di sotto; restando sempre delle due secanti una più, l' altra meno vicin' al diametro, e lo stesso va detto d' ogni altra; caderanno dunque tutte nella stessa periferia DAC. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 82. Delle rett' eguali adattate nella Sfera, e convenute da una banda nello stesso punto di essa, gli estremi dell'altra banda sono nello stesso piano; ed ove di esse uniscansi gli estremi successivi, si avrà un rettilineo iscrittibile al cerchio.

COROLLARIO II.

§. 83. D' ogni Solido equilatere, ed iscrittibile alla sfera, saranno gli estremi de' lati convenuti nello stess' angulo solido di esso nello stesso piano; e saran perciò gl' interni rettilinei dello stesso in un piano, ed iscrittibili al cerchio.

CO-

COROLLARIO III.

§. 84. Essendo l' Ottaedro equilatere (§ 27), ed iscrittibile alla Sfera (§ 7), saranno gl' interni suoi rettilinei in un piano, ed iscrittibili al cerchio.

LEMMA III.

§. 85. *Ogni rettilineo equilatere, ed iscrittibile al cerchio è regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè iscritto questo nel cerchio, tagliando gli eguali suoi lati dal medesimo simili, ed eguali porzioni, saranno i suoi anguli da simili, ed eguali porzioni compresi; e perciò ogni rettilineo equilatere, ed iscrittibile al cerchio è anche equiangulo; è dunque regolare. C. D. D.

PROPOSIZIONE II.

§. 86. *Gl' interni rettilinei dell' Ottaedro son quadrati.*

DIMOSTRAZIONE.

Son questi quadrilateri (§ 21), ed equilateri (§ 28), sono in un piano, ed iscrittibili al cerchio (§ 84); son dunque quadrati (§ pr) C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 87. Son nell' Ottaedro paralleli' i lati, ed i trianguli opposti.

COROLLARIO II.

§. 88. L' Ottaedro sarà diviso da ogni suo quadrato in due simili, ed eguali piramidi quadrate; sicchè saran gli Ottaedri, come le di loro piramidi quadrate.

AVVERTIMENTO.

§. 89. Spesso col solo nome di piramide quadrata si disegnerà quella, ch' è metà dell' Ottaedro, cioè, di cui la base sia quadrato i trianguli equilateri.

CO-

COROLLARIO III.

§. 90. I quadrati dell' Ottaedro son tutti eguali (§ 28).

COROLLARIO IV.

§. 91. Gli assi dell' Ottaedro son le diagonali de' suoi quadrati (§72), e perciò tutti eguali.

COROLLARIO V.

§. 92. Son negli Ottaedri gli assi come i lati.

PROPOSIZIONE III.

§.93. *Gli assi nell' Ottaedro tutti s'intersegan bifariam, ed ad anguli retti nel medesimo punto, ed è questo il centro dell' Ottaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo nell' Ottaedro gli assi diagonali de' suoi quadrati (§ 91), debbon

due di essi intersegarsi *bifariam*, ed ad anguli retti, perchè diagonali dello stesso quadrato; il terzo deve far con ciascuno de' primi lo stesso, e perciò nel medesimo punto, perchè con ciascuno di essi appartiene allo stesso quadrato(§ 73); tutti dunque gli assi dell'Ottaedro s'intersegan *bifariam*, ed ad anguli retti nel medesimo punto.

II. Il punto, in cui tutti gli eguali (§ 91) assi nell'Ottaedro, s'intersegan *bifariam* equidista da tutt'i suoi anguli; e si vedrà lo stesso equidistar anche dai piani, e dai lati come nel (§ 78); gli assi dunque nell' Ottaedro tutti s'intersegan *bifariam*, ed ad anguli retti nel medesimo punto, ed è questo il centro dell'Ottaedro C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 94. L'asse dell' Ottaedro è lo stesso, che l'asse della Sfera circoscrittibile ad esso; dal che siccome nell'Ottaedro il quadrato del lato è doppio di quello del suo semiasse, così sarà doppio di quello del ragio della Sfera circoscrittibile ad esso,

ſo; e così parimente ſiccome il quadrato del lato ſta a quello del ſuo aſſe, come 1 : 2, così ſarà a quello dell'aſſe della Sfera circoſcrittibile ad eſſo.

COROLLARIO II.

§. 95. Se ogni aſſe dell' Ottaedro è perpendiculare agli altri due, e nel punto, in cui quelli s'interſegano, ſarà ogni aſſe normale a quel quadrato, che paſſa per quelli; e perciò l'altezza d'ogni piramide quadrata dell'Ottaedro è un ſuo ſemiaſſe.

COROLLARIO III.

§. 96. Avendo veduta normale ad ogni triangulo dell'Ottaedro la retta, che uniſce il centro del triangulo col centro dell' Ottaedro, ed eſſendo nell' Ottaedro parallell'i trianguli oppoſti, la retta, che nell'Ottaedro uniſce i centri di due ſuoi trianguli oppoſti è ad entrambi normale, e paſſa pel centro dell'Ottaedro.

AVVERTIMENTO.

§. 97. Questa retta sarà detta diametro dell'Ottaedro, siccom'è diametro della Sfera iscrittibile in esso.

COROLLARIO IV.

§. 98. Essendo nell'Ottaedro paralleli i piani opposti, ed essendo il diametro ad entrambi normale sarà nell'Ottaedro il diametro lo stesso, che la sua altezza.

COROLLARIO V.

§. 99. Negli Ottaedri gli anguli, che fanno gli assi ne' rispettivi lati son tutti assolutamente, e relativamente eguali, perchè tutti semiretti.

COROLLARIO VI.

§. 100. Incontrando le normali calate dal centro dell'Ottaedro i suoi piani tutti nel centro; sarà nell'Ottaedro il centro equidistante dai centri dei piani.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

§. 101. *Gli Ottaedri sono in ragion triplicata de' lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Son gli Ottaedri, come le di loro piramidi quadrate (§ 88); ma queste son anche relativamente simili, perchè terminate da egual numero di piani relativamente simili, e perciò in ragion triplicata de'lati, che non sono, che i lati de'rispettivi Ottaedri; son dunque gli Ottaedri in ragion triplicata de'lati. C.D.D.

PROPOSIZIONE V.

§. 102. *L'Ottaedro è alla Piramide in ragion composta dalla triplicata de' lati, e da quella di 4 : 1.*

DIMOSTRAZIONE.

La Piramide è all'Ottaedro de' lati eguali, come 1 : 4 (§ 61); l'Ottaedro è

ad ogni altro Ottaedro, in ragion triplicata de' lati (§ pr) dunque la Piramide è a qualunque Ottaedro in ragion composta da quella di 1 : 4, e dalla triplicata de' lati; e perciò l'Ottaedro è alla Piramide, come s'è detto, e D. D.

PROPOSIZIONE VI.

§. 103. *Se s'intendano nell'Ottaedro tutti tirat' i suoi assi, resterà diviso in otto piramidi triangulari simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Figura solida. I. Gli assi nell'Ottaedro tutti s' intersegan nel centro, ed ànno gli estremi in tutt'i suoi anguli, e perciò in tutti gli anguli de' suoi trianguli, e questi son otto (§ 62); tirati dunque nell'Ottaedro i suoi assi resta diviso in otto piramidi triangulari.

II., e III. Ciascuna di sì nate piramidi à per base un triangulo dell'Ottaedro, ed à ognuno de' trianguli superiori fatto da un lato dell'Ottaedro, e due semiassi dello stesso; sono dunque tutte simili,

mili, ed eguali; e perciò, se s' intendano &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 104. L' altezza d' ogni sì fatta piramidetta è il semidiametro dell'Ottaedro.

COROLLARIO II.

§. 105. Dividendosi nell' Ottaedro gli assi *bisariam*, ed ad angoli retti (§ 93); saranno di sì fatte piramidette i triangoli superiori nel vertice rettanguli, ed isosceli, cioè simili a quelli, ne' quali vien diviso il quadrato dalla diagonale; sicchè, siccome l'Ottaedro è ottuplo d'ogni sua sì fatta piramidetta, potrà dirsi ottuplo della piramide, di cui la base sia un triangulo equilatere del suo lato, i trianguli superiori nel vertice rettanguli, ed isosceli; dal che sarà ogni sì fatta piramide, (cui sarà dato il nome di rettangula), alla piramide regolare del lato della sua base, come 1 : 2 (§ 61).

COROLLARIO III.

§. 106. Essendo negli Ottaedri gli assi, e perciò anche i semiassi, come i lati (§ 92); saranno di sì fatte piramidette, anche appartenendo esse a diversi Ottaedri, simil'i trianguli superiori, dal che simili, anche relativamente saranno le triangulari piramidette degli Ottaedri.

COROLLARIO IV.

§. 107. E poichè delle piramidi simili, e similmente poste sono le altezze, come i lati, e di sì fatte piramidette, stando similmente poste, le altezze sono i semidiametri de' rispettivi Ottaedri (§ 104); saranno negli Ottaedri, come i lati i semidiametri, e perciò anche i diametri.

AVVERTIMENTO.

§. 108. Siccome tutti gli assi dividono l' Ottaedro in otto simili, ed eguali piramidi, così ogni solo suo asse lo divide in quattro, parimente simili, ed eguali,

guali, (come facilmente si avverte), delle quali perciò ciascuna eguaglierà la piramide Regolare del lato dell' Ottaedro (§ 61).

PROPOSIZIONE VII.

§. 109. *Son gli Ottaedri come le Sfere circoscritte, ed iscritte.*

DIMOSTRAZIONE.

Sono negli Ottaedri, come i lati gli assi i diametri (§§ 92 e 107), e sono in essi gli assi, ed i diametri gli stessi, che gli assi, e diametri delle Sfere circoscritte, ed iscritte in essi (§ 94 e 97); son dunque gli Ottaedri come le Sfere circoscritte, ed iscritte. C. D. D.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 110. *L' Ottaedro circoscritto sta all' Ottaedro iscritto alla stessa sfera, come la Sfera circoscritta all' iscritta allo stesso Ottaedro.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

A B C D

Sia A un Ottaedro, B una sfera iſcritta in A, C. un Ottaedro iſcritto in B, e D una sfera iſcritta in C.

Sono gli Ottaedri, come le sfere iſcritte in eſſi (§ pr) dunque ſarà A : C : : B : D; C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 111. *Nell' Ottaedro il quadrato del lato è al quadrato del diametro, come 3 : 2.*

DIMOSTRAZIONE.

La Piramide è all' Ottaedro di lati eguali, come 1 : 4 (§ 61) = 2 : 8; ma l' Ottaedro à alla ſua piramidetta triangulare, come 8 : 1; dunque quella Piramide è a queſta, come 2 : 1; ma dando a queſta per baſe il triangulo dell'Ottaedro ànno entrambe dall' ipoteſi eguali le baſi; ſarà dunque l' altezza della prima, cioè il ſuo aſſe (§ 35) doppia dell'

al-

altezza della seconda, cioè del semidiametro dell'Ottaedro (§ 104); l'asse dunque della Piramide eguaglia il diametro dell' Ottaedro di lati eguali; e perciò sarà il lato dell' Ottaedro al suo diametro, come quello della Piramide al suo asse; cioè ne saranno i quadrati, come $3:2$ (§ 51) C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 112. Essendo nell' Ottaedro il quadrato dell' asse a quello del lato, come $2:1 = 6:3$ (§ 91); sarà quello dell' asse e quello del diametro, come $6:2 = 3:1$.

COROLLARIO II.

§. 113. L' Ottaedro, e la Piramide di lati eguali ànno eguali le altezze, avendo veduto l' asse della Piramide eguale al diametro dell' Ottaedro di lati eguali; dal che sarà 1.° l' Ottaedro quadruplo d'ogni piramide d' eguale base, ed altezza. 2.° Sarà al prisma d'eguale base, ed altezza, come $4:3$. 3.° Sarà a qualunque prisma in ragion composta da quella delle basi, da quella delle altezze, e da quel-

la di 4 : 3. 4°. Si avrà la solidità dell' Ottaedro dal fatto di un suo triangulo in quattro terze parti d' un suo diametro.

PROPOSIZIONE X.

§. 114. *Dell' Ottaedro circoscritto, ed iscritto alla stessa sfera sono i quadrati de' lati, come 3 : 1.*

DIMOSTRAZIONE.

L' asse, e'l diametro dell'Ottaedro son gli assi delle Sfere circoscritta, ed iscritta in esso, ma son *potentia*, come 3 : 1 (§ 112); così son dunque gli assi delle sfere circoscritta, ed iscritta allo stess' Ottaedro; ma sta l'Ottaedro circoscritto all' iscritto alla stessa sfera, come la sfera circoscritta all' iscritta allo stesso Ottaedro; e son gli Ottaedri in ragion triplicata de' lati (§ 101) le sfere in ragion triplicata degli assi; dell'Ottaedro dunque circoscritto, ed iscritto alla stessa sfera sono i quadrati de'lati, come 3 : 1. C. D. D.

PRO-

PROPOSIZIONE XI.

§. 115. *Dell' Ottaedro, e della Piramide circoscrittibili alla stessa sfera sono i lati, e le solidità, come* 1 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

L' Ottaedro, che nasce nella Piramide delle Ottaedrali è circoscrittibile alla stessa sfera, che la Piramide stessa (§ 79); ma questo à il lato, ch' è la metà del lato della Piramide, ed è la sua metà (§§. 56, 61); dunque è chiaro ciocchè D. D.

COROLLARIO.

§. 116. Ma son de' solidi terminati da piani circoscrittibili alla stessa sfera le superficie, come le solidità; saran dunque dell' Ottaedro, e della Piramide circoscrittibili alla stessa Sfera i lati, le solidità, le superficie, come 1 : 2.

la di 4 : 3. 4°. Si avrà la solidità dell' Ottaedro dal fatto di un suo triangulo in quattro terze parti d' un suo diametro.

PROPOSIZIONE X.

§. 114. *Dell' Ottaedro circoscritto, ed iscritto alla stessa sfera sono i quadrati de' lati, come 3 : 1.*

DIMOSTRAZIONE.

L' asse, e'l diametro dell'Ottaedro son gli asſi delle Sfere circoscritta, ed iscritta in esso, ma son *potentia*, come 3 : 1 (§ 112); così son dunque gli asſi delle sfere circoscritta, ed iscritta allo stess' Ottaedro; ma sta l'Ottaedro circoscritto all' iscritto alla stessa sfera, come la sfera circoscritta all' iscritta allo stesso Ottaedro; e son gli Ottaedri in ragion triplicata de' lati (§ 101) le sfere in ragion triplicata degli asſi; dell'Ottaedro dunque circoscritto, ed iscritto alla stessa sfera sono i quadrati de'lati, come 3 : 1. C. D. D.

PRO-

PROPOSIZIONE XI.

§. 115. *Dell' Ottaedro, e della Piramide circoscrittibili alla stessa sfera sono i lati, e le solidità, come 1 : 2.*

DIMOSTRAZIONE.

L' Ottaedro, che nasce nella Piramide delle Ottaedrali è circoscrittibile alla stessa sfera, che la Piramide stessa (§ 79); ma questo à il lato, ch' è la metà del lato della Piramide, ed è la sua metà (§§. 56, 61); dunque è chiaro ciocchè D. D.

COROLLARIO.

§. 116. Ma son de' solidi terminati da piani circoscrittibili alla stessa sfera le superficie, come le solidità; saran dunque dell' Ottaedro, e della Piramide circoscrittibili alla stessa Sfera i lati, le solidità, le superficie, come 1 : 2.

PROPOSIZIONE XII.

§. 117. *Della Piramide, e dell' Ottaedro iscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come* 4 : 3.

DIMOSTRAZIONE.

Il quadrato del lato della Piramide è al quadrato del suo asse, come 3 : 2 (§ 51) = 6 : 4; ma essendo l'asse della Piramide all'asse della sfera circoscrittali, come 2 : 3 (§ 46), è quel quadrato a questo, come 4 : 9; dunque il quadrato del lato della Piramide è a quello dell' asse della Sfera circoscrittali, come 6 : 9 = 4 : 6; ma il quadrato dell'asse della Sfera è a quello del lato dell' Ottaedro iscrittoli, come 2 : 1. = 6 : 3 (§ 94); dunque il quadrato del lato della Piramide è al quadrato del lato dell' Ottaedro iscrittibile alla stessa Sfera, come 4 : 3. C. D. D.

PRO-

PROPOSIZIONE XIII.

§. 118. *L' Ottaedro circoscritto sta alla Piramide iscritta alla stessa Sfera, come* 27 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

L'Ottaedro sta alla Piramide circoscrittibile alla stessa Sfera, come 1 : 2 = 27 : 54 (§ 115); ma la Piramide circoscritta sta all' iscritt' alla stessa sfera, come 27 : 1 = 54 : 2 (§ 47); dunque l' Ottaedro circoscritto sta alla Piramide iscritt' alla stessa sfera, come 27 : 2. C. D. D.

LEMMA I.

§. 119. *Nell' Ottaedro ogni corda è ad un suo asse parallela, ed è la terza sua parte.*

DIMOSTRAZIONE.

Di un qualunque Ottaedro ne siano esibiti due trianguli aderenti ABC DBC così tra loro inclinati, che la retta EF, che ne unisce i centri ci esibisca la cor- Fig. 8.

F da

da dello ſteſſo Ottaedro. Si uniſchi AD, e dagli ſteſſi punti AD ſi calino ſu la comune baſe BC due perpendiculari, queſte dovranno convenir in M punto medio di quella, e paſſar per gli riſpettivi centri (§ 12).

I. Eſſendo i lati AC DC oppoſti agli anguli ABC DBC aderentemente convenuti nello ſteſſo angulo ſolido B dell'Ottaedro; dovran queſti eſibirci un angulo di un quadrato di tal Ottaedro all'angulo B ſottopoſto (§ 86); ſicchè la retta AD, perchè diagonale di un tal quadrato ſarà un aſſe dell' Ottaedro (§ 91); ma a queſto è parallella la corda EF, come quella che taglia proporzionatamente (§ 37) i lati AM DM del triangulo ADM; dunque nell' Ottaedro ogni corda è ad un ſuo aſſe parallella.

II. E perciò ſarà EF : AD : : ME: MA; ma ME : MA : : 1 : 3 (§ 38); dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 120. Le corde dell' Ottaedro ſon tutt' eguali, ſiccome eguali ſon gli aſſi (§ 91).

CO-

COROLLARIO II.

§. 121. Unendo nell'Ottaedro ogni asse quattro coppie di trianguli aderenti; saranno in esso ad ogni asse quattro corde parallelle.

COROLLARIO III.

§. 122. Se si unischano perciò nell'Ottaedro i centri de'trianguli convenuti nello stesso suo angulo si avrà sotto quell'angulo un parallelogrammo equilatere; essendo di sì fatte quattro corde le opposte parallelle allo stesso asse dell'Ottaedro.

COROLLARIO IV.

§. 123. Tirate dunque nell' Ottaedro tutte le corde si vedranno sotto i sei suoi anguli nati sei parallellogrammi assolutamente, e relativamente equilateri, così aderenti, che terminino un parallellepipedo, che à gli anguli ne' centri de' piani dell' Ottaedro.

COROLLARIO V.

§. 124. Il parallellepipedo, che nasce nell' Ottaedro dalle corde è equilatere.

LEMMA II.

§. 125. *Il parallellepipedo, che nasce nell' Ottaedro dalle corde è iscrittibile alla Sfera.*

DIMOSTRAZIONE.

Incontra questo co' suoi anguli i piani dell'Ottaedro tutti nel centro (§ 123); come fa la Sfera iscritta nel medesimo (§ 91); è dunque nella stessa Sfera iscrittibile; C. D. D.

LEMMA III.

§. 126. *Se un Solido equilatere sia iscrittibile alla Sfera, avrà regolari tutt' i suoi piani.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I rettilinei terminanti un Solido ànno gli anguli negli anguli del Solido; quelli dunque, che terminano un Solido iſcrittibile alla sfera, iſcritto queſto nella sfera, l'avranno nella ſuperficie sferica; ma i punti della ſuperficie sferica appartenenti allo ſteſſo piano ſono nella periferia del cerchio, che quel piano imprime nella ſuperficie Sferica; i rettilinei dunque terminati un Solido iſcrittibile alla Sfera, ſono iſcrittibili al cerchio; ma i rettilinei del Solido equilatere ſono equilateri (§ 26.) gli equilateri iſcrittibili al cerchio ſon regolari (§ 85); ſe dunque un Solido equilatere ſia iſcrittibile alla Sfera, avrà regolari tutt'i ſuoi piani. C. D. D.

PROPOSIZIONE XIV.

§. 127. *Il Parallellepipedo, che naſce nell' Ottaedro dalle corde è un Cubo.*

DIMOSTRAZIONE.

E' questo equilatere (§ 124), ed è iscrittibile alla Sfera (§ 125); à perciò regolar' i suoi piani (§ pr); è dunque un Cubo. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 128. Il Cubo, che nasce nell' Ottaedro dalle corde meriterà dirs' iscritto in esso, avendo i suoi angul' in tutt' i piani di quello.

COROLLARIO II.

§. 129. Il Cubo, che resta iscritto nell' Ottaedro dalle corde à il lato, ch' è la terza parte dell' asse dell' Ottaedro (§ 119).

COROLLARIO III.

§. 130. Incontrando la Sfera, che s' iscrive nell' Ottaedro i suoi piani tutti nel centro (§ 77), come fa co' suoi anguli il Cubo iscritto nello stesso; sarà

l'Ot-

l'Ottaedro circoscrittibile a quella Sfera, cui è iscrittibile il Cubo, che nasce in esso dalle Corde.

COROLLARIO IV.

§. 131. E così sarà l'asse dell'Ottaedro circoscritto al lato del Cubo iscritto alla stessa Sfera, come 3 : 1 (§ 119); onde ne saranno i quadrati come 9 : 1 = 18 : 2.

PROPOSIZIONE XV.

§. 132. *Dell'Ottaedro circoscritto, e Cubo iscritto alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come 9 : 2.*

DIMOSTRAZIONE.

Nell'Ottaedro il quadrato del lato è al quadrato dell'asse, come 1:2 = 9:18 (§ 91); ma quello dell'asse dell'Ottaedro circoscritto sta a quello del lato del Cubo iscritto alla stessa Sfera, come 18:2 (§ pr.); dunque &c. C. D. D.



CAPO IV.

Del Cubo.

§. 133. Siccome s'è veduto nato nell' Ottaedro il Cubo, così si vedrà nato nel Cubo l'Ottaedro; or l'esser ciascuno di questi Solidi padre, e figlio dell'altro, fa sì, che sian tra se ligati da tali, e tante relazioni, che sarebbe stato mal fatto il separarne i trattati.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 134. Il Cubo è quel Solido Regolare terminato da sei eguali quadrati, così combinati, che da tre anguli di questi sia compres'ogni solido suo angulo.

COROLLARIO.

§. 135. Gli anguli solidi del Cubo son otto, essendone ventiquattro i suoi anguli piani.

DEFINIZIONE II.

§. 136. Si diranno nel Cubo lati opposti quelli, che insistono ad anguli opposti dello stesso quadrato.

AVVERTIMENTO.

§. 137. Si dimostreranno nel Cubo i lati opposti parallelli, e perciò si distingueranno di essi gli estremi corrispondenti, e gli alterni (§ 42).

COROLLARIO.

§. 138. La retta, che unisce nel Cubo gli estremi corrispondenti di due suoi lati opposti è la diagonale d'un suo quadrato.

DEFINIZIONE III.

§. 139. Anguli opposti son quelli, ne' quali son gli estremi alterni de' lati Opposti.

DEFINIZIONE IV.

§. 140. Assi le rette, che uniscono due suoi anguli opposti.

COROLLARIO.

§. 141. Gli assi uniscono gli estremi alterni de' lati opposti (§ 139) e non sono, che quattro (§ 135).

LEMMA.

§. 142. *Nel Cubo ogni lato è normale ai quadrati, ne' quali insiste.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè così incontra con ogni estremo il vertice di un angulo di uno di essi, che fa con i prodotti lati di quell' an-

angulo quattro anguli retti. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 143. Ad ogni quadrato del Cubo son normali gli altri quattro, che gli sono aderenti.

COROLLARIO II.

§. 144. Nel cubo i lati opposti son parallelli, ed unendone gli estremi corrispondenti si avrà un parallellogrammo rettangulo.

COROLLARIO III.

§. 145. Le diagonali d'ogni sì fatto rettangulo son assi del Cubo (§ 141); e perciò quegli asi, che calansi da due anguli contigui de Cubo come diagonali di un medesimo sì fatto rettangulo sono eguali, e s' intersejan *bifariam*.

PROPOSZIONE I.

§. 146. *Nel Cubo gli assi sono eguali, tutti s' intersegan nel medesimo punto bi-*

fa-

fariam, *ed è questo il suo centro*.

DIMOSTRAZIONE.

I. e II. Nel Cubo ogni angulo ne à altri tre contigui (§ 8); sicchè ogni asse dev' eguagliarsi, e dividersi *bifariam* con altri tre (§ pr), e perciò nel medesimo punto; ma quattro son gli assi del Cubo (§ 141); nel Cubo dunque tutti gli assi sono eguali, e s' intersegan nel medesimo punto *bifariam*.

III. Se son tutti eguali gli assi del Cubo, e tutti nello stesso punto s'intersegan *bifariam*; sarà quel punto equidistante da tutt' i suoi anguli; ma se questo si unisca co' centri de' piani, si vedran queste rette a quelli normai, ed eguali; se si unisca co' punti medi de' lati si vedrà lo stesso, come nel (§ 74); è questo dunque il suo centro, come D. D.

COROLLARIO I.

§. 147. Al Cubo dunque è circoscrittibile, ed iscrittibile la Sfera.

CO-

COROLLARIO II.

§. 148. L'asse dunque del Cubo è lo stesso, che l'asse della Sfera circoscrittibile ad esso, e quello della Sfera è lo stesso, che quello del Cubo iscrittibile in essa.

COROLLARIO III.

§. 149. Essendo nel Cubo la retta, che unisce gli estremi corrispondenti de' suoi lati opposti diagonale di un suo quadrato (§ 138), ed essendo perciò il quadrato dell'asse triplo del quadrato del lato; ed essendo così ne' Cubi gli assi, come i lati; saranno i Cubi, come le Sfere circoscritte.

COROLLARIO IV.

§. 150. Ma son ne' Cubi, come i lati anche le diagonali de' rispettivi quadrati; simili saran dunque in essi assolutamente, e relativamente i trianguli, che nascono in essi tra un asse, un lato, ed una diagonale de' rispettivi quadrati; e perciò

sa-

faranno ne' Cubi affolutamente, e relativamente eguali gli anguli, che fanno gli affi ne' rifpettivi lati.

COROLLARIO V.

§. 151. La Sfera, che s' iſcrive nel Cubo incontra i ſuoi piani tutti nel centro; dal che, eſſendo normali ai piani del Cubo le rette, che uniſcono il ſuo centro co'centri de' piani; ed eſſendo nel Cubo paralleli i piani oppoſti; la retta, che uniſce nel Cubo i centri di due ſuoi piani oppoſti è ad eſſi normale, e paſſa pel centro; e così ſiccom'è diametro della Sfera iſcrittibile al Cubo, così dirafsi diametro del Cubo. Il diametro dunque del Cubo è lo ſteſſo, che il diametro della Sfera iſcrittibile in eſſo, ed *inverſa.*

COROLLARIO VI.

§. 152. Il diametro del Cubo eguaglia il ſuo lato; miſurando l' uno, e l' altro la diſtanza di due piani parallelli (§ 142); dal che 1.° ſaranno i Cubi, come le Sfere iſcritte in eſsi. 2.° Sarà nel Cubo il qua-

quadrato dell' asse a quello del diametro, come 3 : 1 (§ 149), cioè, come sta nell' Ottaedro l' asse al diametro.

LEMMA I.

§. 153. *Nel Cubo ogni corda eguaglia la metà della diagonale di un suo quadrato.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappresentino A e B due quadrati d' un Cubo aderenti colla stessa inclinazione, che ànno nel Cubo, cosicchè la retta A B, che ne unisce i centri esibisca la corda dello stesso Cubo. Si tiri la diagonale G H; questa dovrà passare pel centro A, e restar in esso divisa *bifariam*; dai punti in fine AB si calino su la comune base IH due perpendiculari, queste, dovendo entrambe dividere *bifariam* IH, converranno nel suo punto medio E. Fig. 9.

Essendo, per costruzione, nel triangulo AEH retto l' angulo in E, e semiretto quello in H; sarà parimente semiretto l'altro in A; sicchè sarà AE=EH; e per-

e perciò AHq. doppio di AEq.; ma essendo nel triangulo AEB retto l' angulo in E perchè misura dell' inclinazione de' quadrati A B, ed egual' i lati AE BE (§ 12); sarà parimente ABq. doppio dello stesso AEq.; dunque la corda AB eguaglia la semidiagonale AH; C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 154. Nel Cubo le corde son tutt' eguali; e sono ne' Cubi le corde, come le diagonali, e perciò come i lati.

COROLLARIO II.

§. 155. Se il quadrato della diagonale di un quadrato è il doppio del quadrato stesso; sarà quello della semidiagonale, cioè quello della corda del Cubo la metà del quadrato del Cubo.

LEMMA II.

Fig. 10. §. 156. *Le rette, che uniscono i tre punti A B C, de' quali ognuno equidista dagli altri due non sono in diretto, ma* com-

comprendono un triangulo equilatere.

DIMOSTRAZIONE.

Se fufser in diretto, farebbe per l'ipotefi la parte AB eguale al tutto AC; non fon dunque in diretto, e perciò comprendono un triangulo, per l'ipotefi ftefsa equilatere. C. D. D.

PROPOSIZIONE II.

§. 157. *Tirate nel Cubo tutte le corde, refta in effo ifcritto un Ottaedro, ed è quefto la fefta fua parte.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Effendo nel Cubo tutt'eguali le corde (§ 154) de' tre centri de'quadrati convenuti nello fteffo fuo angulo ognuno equidiftarà dagli altri due; e perciò, tirate nel Cubo quefte tre corde, fi avrà fotto quell'angulo un triangulo equilatere (§ pr), e tiratele tutte fi avranno otto eguali trianguli equilateri fotto gli otto anguli del Cubo, così aderentemente Figura folida.

G con-

contigui, che terminino un solido; ma sono in questo sei gli anguli, giacchè sei sono i piani del Cubo; ed in ogni angulo di questi convengono quattro anguli di quei trianguli; giacchè, essendo nel Cubo ogni piano ad altri quattro contigui, in ogni centro d'ogni piano di esso convengono quattro corde (§ 14), e perciò quattro di quegli anguli (§pr); tirate dunque nel Cubo tutte le Corde nasce in esso un Ottaedro, che avendo gli anguli in tutt'i piani del Cubo, meriterà dirs' iscritto in esso (§ 16).

II. Questo, avendo gli anguli ne'centri de'quadrati del Cubo, avrà per asse il diametro del medesimo (§ 151), ed avrà perciò per altezza d'ogni sua piramide quadrata un semidiametro dello stesso (§ 95) dividendosi dunque l'Ottaedro in due eguali sì fatte piramidi quadrate (§ 88); si avrà la solidità dell'Ottaedro, nato così nel Cubo dal fatto del doppio di un quadrato della corda, e perciò di un quadrato del Cubo (§ 155), e della terza parte del semiasse dell'Ottaedro, cioè la sesta parte del diametro, o sia lato del Cubo (§ 152); ma s'à la So-

li-

lidità del Cubo dal fatto d'un suo quadrato per l'intero suo lato; l'Ottaedro dunque nel Cubo iscritto dalle corde è la sesta sua parte; ed è perciò vero ciocchè D. D.

COROLLARIO I.

§. 158. Son, come i Cubi gli Ottaedri iscritti in essi.

COROLLARIO II.

§. 159. Essendo l'asse dell'Ottaedro iscritto nel Cubo diametro del Cubo, e perciò suo lato (§ 152); sarà l'Ottaedro la sesta parte del Cubo del suo asse, ed iscrittibile in esso.

COROLLARIO III.

§. 160. Se il Cubo è all'Ottaedro della sua corda, come $6 : 1$; sarà a quello della diagonale di un suo quadrato, come $6 : 8 = 3 : 4$ (§153).

COROLLARIO IV.

§. 161. Dal che sarà il Cubo alla piramide fatta su la stessa diagonale, come 3 : 1 (§ 61).

COROLLARIO V.

§. 162. Se sta il Cubo alla Piramide fatta su la diagonale di un suo quadrato, come 3 : 1 (§ pr), il Cubo, e la piramide disegnata avranno in ragion reciproca le basi, e le altezze.

PROPOSIZIONE III.

§. 163. *Il Cubo sta all' Ottaedro in ragion composta della triplicata di quella, che à la diagonale di un suo quadrato al lato dell' Ottaedro, e da quella di 3:4.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo è all'Ottaedro della diagonale di un suo quadrato, come 3 : 4 (§ 160), questo è ad ogni altro Ottaedro in ragion tri-

triplicata de' lati (§ 101); Dunque il Cubo è all'Ottaedro come s'è detto, e D. D.

PROPOSIZIONE IV.

§. 164. *Il Cubo è alla Piramide in ragion composta dalla triplicata di quella, che à la diagonale di un suo quadrato al lato della Piramide, e da quella di 3:1.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo è alla Piramide fatta su la diagonale di un suo quadrato, come 3:1 (§ 161); questa è ad ogni altra piramide in ragion triplicata de' lati; il Cubo dunque è alla Piramide come s'è detto, e D. D.

PROPOSIZIONE V.

§. 165. *Il Cubo circoscritto sta all'Ottaedro iscritto alla stessa sfera, come 6:1.*

DIMOSTRAZIONE.

Incontrando la Sfera, che s'iscrive nel Cubo i suoi piani tutti nel centro (§ 151),

come fa co' suoi anguli l'Ottaedro iscritto nel medesimo (§ 157); sarà l'Ottaedro, che s'iscrive nel Cubo quello stesso, che può iscriversi nella Sfera iscritta nel Cubo, e perciò sarà il Cubo circoscritto all'Ottaedro iscritto alla stessa Sfera come 6 : 1 (§ 157) C. D. D.

PROPOSIZIONE VI.

§. 166. *Il Cubo nato nell' Ottaedro dalle corde sta all' Ottaedro, come* 2 : 9.

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo, che così nasce nell'Ottaedro è fatto su la terza parte dell' asse suo (§ 119); starà dunque al Cubo di tal asse, come 1 : 27 = 2 : 54; ma il Cubo fatto su l'asse dell'Ottaedro sta all' Ottaedro, come 6 : 1 (§ 159) = 54 : 9; il Cubo dunque nato nell'Ottaedro dalle Corde sta all'Ottaedro, come 2 : 9. C. D. D.

PROPOSIZIONE VII.

§. 167. *L'Ottaedro circoscritto è al Cubo iscritto alla stessa Sfera, come 9:2.*

DIMOSTRAZIONE.

Incontrando la Sfera, che s'iscrive nell'Ottaedro i suoi piani tutti nel centro, come fa co' suoi angul'il Cubo iscritto nel medesimo (§ 130) sarà il Cubo, che nasce nell'Ottaedro dalle corde quello stesso, che può iscriversi nella Sfera iscritta nel medesim'Ottaedro, e perciò sarà l'Ottaedro circoscritto al Cubo iscritto alla stessa Sfera, come 9:2 (§ pr) C. D. D.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 168. *La Piramide circoscritta è al Cubo iscritto alla stessa Sfera, come 9:1.*

DIMOSTRAZIONE.

La Piramide è all' Ottaedro circoscrittibile alla stessa sfera, come 2 : 1 = 18:9 (§ 115); ma l' Ottaedro circoscritto sta al Cubo iscritto alla stessa Sfera, come 9 : 2 (§. pr); dunque la Piramide circoscritta sta al Cubo iscritto alla stessa Sfera, come 18 : 2 = 9 : 1. C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 169. *Il Cubo e la Piramide iscrittibili alla stessa Sfera, sono come 3 : 1.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo iscritto è alla Piramide circoscritta alla stessa Sfera, come 1 : 9 = 3 : 27 (§ pr.); ma la Piramide circoscritta, è all' iscritta alla stessa Sfera, come 27 : 1 (§ 47); dunque il Cubo e la Piramide iscrittibili alla stessa Sfera, sono come 3 : 1. C. D. D.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

§. 170. *Il Cubo circoſcritto ſta al Cubo iſcritto allo ſteſs' Ottaedro, e l' Ottaedro circoſcritto all'Ottaedro iſcritto allo ſteſſo Cubo, come 27 : 1.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Il Cubo ſta all' iſcrittoli Ottaedro, come *6* : 1 = 54 : *9* (§ 157) queſto ſta al Cubo iſcrittoli, come *9* : 2 (§ *166*); dunque il Cubo circoſcritto ſta al Cubo iſcritto allo ſteſs' Ottaedro, come 54 : 2 = 27 : 1.

II. Similmente l' Ottaedro ſta al Cubo iſcrittoli, come *9* : 2 = 27 : *6*, queſto ſta all' Ottaedro iſcrittoli, come *6* : 1; dunque l'Ottaedro circoſcritto ſta all'iſcritto allo ſteſſo Cubo, come 27 : 1. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 171. Il Cubo circoſcritto allo iſcritto allo ſteſs' Ottaedro, l' Ottaedro circoſcritto all' iſcritto allo ſteſſo Cubo, e la Pi-

Piramide circoſcritta all'iſcritta alla ſteſſa Sfera ſono nella ſteſſa ragione (§ 47).

COROLLARIO II.

§. 172. Di queſti Solidi i lati de' circoſcritti ſono ai lati de' relativ' iſcritti, come 3 : 1.

PROPOSIZIONE XI.

§. 173. *Del Cubo, e della Piramide iſcrittibili alla ſteſſa Sfera ſono i quadrati de' lati, come* 1 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo, e la Piramide iſcrittibili alla ſteſſa Sfera ſon come 3 : 1 (§ 169); ma il Cubo è alla Piramide fatta ſu la diagonale di un ſuo quadrato, come 3 : 1 (§ 161); dunque la Piramide fatta ſu la diagonale del quadrato del Cubo ſi è quella, ch'è iſcrittibile nella ſteſſa Sfera, che il Cubo; e perciò del Cubo, e della Piramide iſcrittibili nella ſteſſa Sfera ſono i quadrati de' lati, come 1 : 2. C.D.D.

AV-

AVVERTIMENTO.

§. 174. Se si tir' in ogni quadrato del Cubo una diagonale, in modo da terminarsi da esse una piramide (ciocchè facilmente si ottiene) quest' avendo gli anguli in tanti anguli del Cubo mostrerà bene d'esser iscrittibile nella stessa Sfera, che il Cubo.

COROLLARIO.

§. 175. E poichè, per ottenersi tal interna Piramide nel Cubo, restan da esso dalle stesse diagonali tagliate quattro piramidi simili, ed eguali; sarà perciò il Cubo ad ogni piramide, che da esso tagliano le sue diagonali, cioè ad ogni sua piramide angulare (§ 24) come $6:1$.

PROPOSIZIONE XII.

§. 176. *Della Piramide, e del Cubo circoscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come 6 : 1.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Il quadrato del lato della Piramide è a quello del suo asse, come 3 : 2 = 6 : 4 (§ 51), ma il quadrato dell'asse della Piramide è a quello dell'asse della Sfera iscrittibile ad essa, come 4:1 (§ 46), l'asse della Sfera è lo stesso, che il diametro, o sia lato del Cubo alla stessa Sfera circoscrittibile (§ 151); dunque il quadrato del lato della Piramide è a quello del lato del Cubo alla stessa Sfera circoscrittibile, come 6 : 1. C. D. D.

PROPOSIZIONE XIII.

§. 177. *Dell' Ottaedro, e del Cubo circoscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come 3 : 2.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Diametro dell'Ottaedro è lo stesso, che l'asse della Sfera iscrittali (§ 97) questo è lo stesso, che il diametro, o sia lato del Cubo circoscrittibile ad essa (§ 151);

(§ 151); sarà dunque il lato dell'Ottaedro a quello del Cubo circoscrittibile alla stessa Sfera, come sta al suo diametro, e perciò ne saranno i quadrati, come 3 : 2 (§ 111). C. D. D.

PROPOSIZIONE XIV.

§. 178. *Dell'Ottaedro, e del Cubo iscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come 3 : 2.*

DIMOSTRAZIONE.

L'asse della Sfera è asse dell'Ottaedro, e del Cubo iscritt'in essa (§§ 94, e 148); ma nell'Ottaedro il quadrato del lato è a quello dell'asse, come 1 : 2 = 3 : 6 (§ 94); nel Cubo quello dell'asse è a quello del lato, come 6 : 2 (§ 149); dunque dell'Ottaedro, e del Cubo iscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come 3 : 2. C. D. D.

CO-

COROLLARIO I.

§. 179. Dell' Ottaedro, e del Cubo circoſcritti alla ſteſſa Sfera ſono i lati, come quelli dell' Ottaedro, e del Cubo alla ſteſſa Sfera iſcritti (§pr).

COROLLARIO II.

§. 180. E perciò ſaran permutando del Cubo circoſcritto, ed iſcritto alla ſteſſa Sfera i lati, come quelli dell' Ottaedro circoſcritto, ed iſcritto alla ſteſſa Sfera; onde ſarà il Cubo circoſcritto al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come l' Ottaedro circoſcritto all' iſcritto alla ſteſſa Sfera.

COROLLARIO III.

§. 181. E così nuovamente permutando, ſarà il Cubo all' Ottaedro alla ſteſſa sfera circoſcrittibili, come il Cubo all' Ottaedro alla ſteſſa sfera iſcrittibili.

COROLLARIO IV.

§. 182. Essendo nel Cubo il quadrato dell'asse a quello del lato, come 3 : 1 (§ 149); ed essendo il lato lo stesso, che il diametro (§ 152), questo lo stesso, che l'asse della sfera iscritta in esso, questo lo stesso, che l'asse del Cubo in essa iscritto; sarà il quadrato dell'asse del Cubo circoscritto a quello dell' asse del Cubo iscritto alla stessa sfera, come 3 : 1; ma son ne' Cubi gli assi, come i lati (§ 149); saran dunque tanto de' Cubi circoscritto, ed iscritto alla stessa sfera, quanto degli Ottaedri alla stessa sfera circoscritto, ed iscritto i quadrati de' lati, come 3 : 1.

PROPOSIZIONE XV.

§. 183. *Il Cubo circoscritto è al Cubo iscritto alla stessa Sfera, come la Sfera circoscritta all' iscritta allo stesso Cubo.*

DIMOSTRAZIONE.

A B C D

Sia A un Cubo B la Sfera iſcritta in A, C il Cubo iſcritto in B, e D la Sfera iſcritta in C.

Sono i Cubi, come le Sfere ad eſs' iſcritte (§ 152); dunque A : C : : B : D. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 184. Sarà la Sfera circoſcritta all'iſcritta allo ſteſſo Cubo, come la Sfera circoſcritta all' iſcritta allo ſteſs' Ottaedro (§ 180, e 110).

CAPO



CAPO V.

Del Dodecaedro.

IL trattato dell' Icosaedro si farà seguir questo del Dodecaedro, perchè dipendente da esso.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 185. Dodecaedro si appella quel Solido Regolare terminato da dodici pentagoni, e perciò regolari, ed eguali, così combinati, che in ogni angulo solido del Dodecaedro convengano tre de'di loro anguli piani.

COROLLARIO.

§. 186. Gli anguli Solidi del Dodecaedro son venti, essendo sessanta i suoi anguli piani.

DEFINIZIONE II.

§.187. Si diranno lati opposti nel Dodecaedro quelli, che insistono a quegli anguli di due suoi pentagoni aderenti, che si oppongono alla comune lor base.

AVVERTIMENTO.

§. 188. Si noti tale esser la natura del Dodecaedro in seguito dell'uniformità norma della Regolarità, che i suoi lati opposti non da una sola banda, e così con due soli estrem' insistano a quegli anguli di due suoi pentagoni aderenti, che si oppongono alla comune lor base, ma anche dall' altra banda cogli altri estremi faccian lo stesso in altri due simili pentagoni.

COROLLARIO.

§. 189. Nel Dodecaedro dunque ad ogni lato un altro solo n'è opposto.

DEFINIZIONE III.

§. 190. Poichè nel Dodecaedro si mostreran parallell' i lati opposti; potremo perciò notare in essi gli estremi corrispondenti, e gli alterni (§ 42); e sono i primi quelli, che insistono ad anguli opposti alla stessa comune base; i secondi quelli, che insistono ad anguli opposti a diversa comune base.

DEFINIZIONE IV.

§. 191. Anguli opposti son quelli, ne' quali sono gli estremi alterni de'lati opposti.

AVVERTIMENTO.

§. 192. Si noti, che in seguito della stessa Uniformità norma della Regolarità, degli estremi de'lati convenut' in due anguli opposti del Dodecaedro non solo due, ma tutti siano alterni di lati opposti.

COROLLARIO.

§. 193. Gli anguli dunque opposti a due anguli contigui son anche contigui, e perciò i lati, che l'una, e l'altra coppia tramezzano son opposti; sicchè a cinque anguli annularmente contigui, come son quelli, ne' quali son gli anguli dello stesso pentagono, ne son opposti altri cinque, anche annularmente contigui, cioè, ne' quali anche son gli anguli dello stesso pentagono, e perciò tutt' i lati del primo pentagono saran relativamente opposti ai lati del secondo; sicchè potran dirsi

DEFINIZIONE V.

§. 194. Pentagoni opposti quelli, che son terminati da lati relativamente opposti.

DEFINIZIONE VI.

§. 195. Assi nel Dodecaedro son le rette, che uniscono due suoi anguli opposti.

CO-

COROLLARIO I.

§. 196. Gli assi nel Dodecaedro uniscono gli estremi alterni de' lati opposti (§ 191).

COROLLARIO II.

§. 197. Nel Dodecaedro gli assi son dieci(§ 186).

DEFINIZIONE VII.

§. 198. Siccome sarà detta corda di un pentagono regolare la sottesa ad uno de' suoi anguli, e nel Dodecaedro, oltre gli esterni pentagoni, se ne mostreranno altri interni parimente regolari; così nel Dodecaedro, (per non confonder queste colle altre sue corde (§ 14)), saran dette corde pentagonali prime, o semplicemente pentagonali prime, le corde degli esterni suoi pentagoni; e pentagonali seconde le corde degl' interni; ed ogni corda sì fatta sarà detta opposta a quel lato del pentagono, che si oppone a quello stesso angulo del medesimo, cui è la corda sottomessa.

LEMMA I.

§. 199. *Ne' pentagoni regolari le corde sono ai lati proporzionali, e parallelle ai lati opposti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 11. Ne' regolari pentagoni BCDEF GHIKL siano tirate le corde FC FD LI.

I. Avendo i trianguli DEF IKL per l'ipotesi eguali gli angul' in E K, ed i lati, che li comprendono proporzionali, perchè eguali, saran simili, e perciò saran le corde ai lati proporzionali.

II. Gli anguli DFC, FCB, come insistenti ad eguali archi, circoscrittosi al pentagono il cerchio, sono eguali; e perciò la corda DF è parallella all' opposto lato BC; locchè avendo sempre luogo; sarà vero, ciocchè D. D.

COROLLARIO I.

§. 200. Le corde dello stesso pentagono, o di pentagoni regolari d'eguali lati sono eguali, e perciò eguali son tutte le pen-

pentagonali prime del Dodecaedro.

COROLLARIO II.

§. 201. Ad ogni pentagonale prima è parallello quel lato, che l'è opposto.

LEMMA II.

§. 202. *Gli anguli, che forma ogni lato del Dodecaedro nelle corde del pentagono, cui insiste sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

BCFA esprima un angolo solido del Fig. 12. Dodecaedro di cui sia compito, per comodo della dimostrazione, il solo pentagono BCDEF; ed in questo sian tirate le corde BD BE. Dal punto A sul piano del pentagono si cali la normale AG, ed unito GB, si uniscano i punti A e G con i punti CDEF.

Per costruzione ACq = AGq + GCq; ed AFq = AGq + GFq; ma ACq = AFq. perchè pentagonali prime (*fig. solida*) dello stesso Dodecaedro (§. 200);

 dun-

dunque AGq + GCq = AGq + GFq; e perciò GC = GF; questo fa conoscere, che ne' trianguli GBC GBF siano eguali gli anguli in B; ai quali uniti gli altri eguali anguli DBC EBF si conosceranno eguali gli anguli GBD GBE; da questo apparisce l' eguaglianza de'lati GD GE; da questo l' eguaglianza degli altri lati AD AE; e da questo finalmente l' eguaglianza degli anguli ABD ABE, cioè quelli, che fa il lato AB del Dodecaedro nelle corde del pentagono, cui insiste, locchè avendo sempre luogo, saranno &c. C.D.D.

LEMMA III.

§. 203. *Gli anguli, che fanno i lati del Dodecaedro nelle corde de' pentagoni, ne' qual' insistono son eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 12. Gli anguli Solidi BCFA, IKNH si credano appartenere allo stesso Dodecaedro, di cui sian compit'i soli pentagoni BCDEF IKLMN, e sian in questi tirate le corde BD BE IL IM.

Questi

Questi anguli perchè fatti da soli tre anguli piani relativamente eguali sono eguali, e perciò soprapposti dovran combacciare; Se credasi dunque soprapposto l'angulo B all'angulo I in modo, che vada l'angulo CBF su l'angulo KIN, si vedrà il lato AB cader sul lato IH, e l'intero pentagono BCDEF sul pentagono IKLMN, essendo simili, ed eguali (§ 1); se dunque da punto a punto non può tirarsi, che una retta, caderanno anche le corde BD BE su le corde IL IM; dal che combacciando gli eguali anguli (§ pr) ABD ABE cogli anguli HIL HIM, e dovendo questo aver sempre luogo, sarà sempre vero ciocchè D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 204. Si vedranno nel Capo VIII. degli anguli solidi eguali, che non possono combacciare; ma ivi si vedrà di vantaggio, che non poss'aver luogo sì fatta incombacciabilità ove siano gli eguali anguli compresi da anguli piani non solo relativamente, ma anche assolutament'eguali; ecco perchè degli eguali anguli

così

così fatti se ne sia afferita, e se ne asserirà la combacciabilità.

PROPOSIZIONE I.

Fig. 13. §. 205. *Nel Dodecaedro le pentagonali prime AB BC CD DA, che uniscono estremi di lati insistenti nello stesso EF altro lato del medesimo sono in un piano, e chiudono un quadrato.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Le corde AB CD, perchè parallelle alla stessa FE base comune degli aderenti péntagoni M N (§ 201) son parallelle tra loro, e perciò nello stesso piano; ma in questo pogian gli estremi AD BC son tutte dunque nello stesso piano.

II. Essendo AB CD non solo parallelle, ma eguali (§ 200) sarà ABCD parallellogrammo; si tirino in questo le diagonali AC BD, e ne' pentagoni M N le corde AE DE; si avranno ne' trianguli AEC DEB i lati AE DE eguali, perchè pentagonali prime (§ 200), i lati EB EC eguali perchè lati del Dodecaedro,

dro, e gli anguli che questi fanno in quelle eguali (§ pr); eguali ne son dunque le basi AC BD; e perciò ABCD è rettangulo, ma à anche i lati eguali, perchè tutti pentagonali prime (§ 200) sarà dunque quadrato. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 206. E poichè in ogni lato del Dodecaedro ne insistono altri quattro (§8); potrà sott'ogni lato del Dodecaedro aver luogo un sì fatto quadrato.

PROPOSIZIONE II.

§. 207. *I quadrati, che dalle pentagonali prime nascon nel Dodecaedro sotto i suoi lati opposti son parallelli tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè insistendo nel Dodecaedro i suoi lati opposti dall'una, e dall' altra banda a quei vertici de'suoi pentagoni aderenti, che si oppongono alla comune lor base (§ 188); saranno gl' infe- Figure solide.

feriori, e fuperiori lati de' quadrati così nati fotto i lati oppofti parallelli tra loro, perchè parallella ogni coppia di effi alla rifpettiva di quelle comuni bafi, e ne faran parallell' i laterali, perchè uniti da lati, per la fteffa ragion parallelli; fon dunque i quadrati &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 208. Se i quadrati così nati fotto i lati oppofti fon terminati da lati relativamente parallelli; parallelli faran nel Dodecaedro i lati oppofti, perchè parallelli a pentagonali parallelle.

COROLLARIO II.

§. 209. Dal che parallelli anche faran nel Dodecaedro i pentagoni oppofti (§194).

COROLLARIO III.

§. 210. Le rette, che unifcono gli angoli corrifpondenti di sì nati quadrati aggiungeranno ad effi altri quattro laterali parallellogrammi; e così chiuderanno con

effi

essi un parallellepipedo; ma i laterali parallellogrammi, che così nascono, sono altri quattro quadrati nati similmente da altre simili pentagonali; con tale operazione dunque nasce nel Dodecaedro un Cubo, il quale avendo tutt' i suoi anguli in tanti altri anguli del Dodecaedro, sarà iscrittibile nella stessa Sfera, che quello, (qualora si trovi, che lo sia il Dodecaedro alla sfera iscrittibile, come si vedrà).

PROPOSIZIONE III.

§. 211. *Nel Dodecaedro le pentagonali prime, che uniscono gli estremi de' lat' insistenti nello stesso pentagono del medesimo, sono in un piano, e comprendono un pentagono regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo ciascuna di queste parallella al rispettivo lato del sottoposto pentagono (§ 201), se non fussero nello stesso piano, sarebbero i varj piani nell' ipotesi passanti per i varj anguli di esse, parallelli tra loro, perchè parallelli allo stesso Figura solida.

sot-

fottopofto pentagono, e fi farebbero incontrati; fon dunque nello fteffo piano.

II. Ma fono eguali (§ 200), e comprendono anguli a quelli del fottopofto pentagono eguali; effendo parallelle ai lati di quello; comprendono dunque un pentagono regolare; C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 212. Ogni sì fatto pentagono è parallello al pentagono efteriore fottopofto, e perciò parallello parimente all' altro a quell' oppofto.

COROLLARIO II.

§. 213. Tutti sì fatti pentagoni fono eguali (§ 200), e perciò eguali fon anche tutte le corde di efsi, cioè le già dette pentagonali feconde.

COROLLARIO III.

§. 214. Poichè ne' pentagoni regolari fono i lati alle corde proporzionali (§ 199); farà per ciò nel Dodecaedro ogni pen-

pentagonale prima media proporzionale tra il lato, e la pentagonale seconda del medesimo.

LEMMA.

§. 215. *Le rette, che uniscono nel Dodecaedro di due suoi pentagoni aderenti i vertici opposti alla comune lor base, son le sue pentagonali seconde.*

DIMOSTRAZIONE.

I tre pentagoni regolari, ed eguali A B D uniti nell'angulo solido D esprimano quella parte di un Dodecaedro, che ne dimostrano tre suoi pentagoni unit'in un angulo dello stesso; di questi, che tutti aderiscono, se ne uniscano due anguli A B opposti alla comune base C D, e si tirino negli stessi due pentagoni A B le pentagonali prime CA CB opposte a quei lati, ne'quali questi due pentagoni toccano il terzo. Fig. 14.

Essendo le corde AC CB opposte, per costruzione, ai lati dello stesso pentagono D, uniranno queste tre estremi di lati AM CD BN insistenti allo stesso pentagono

gono MDN, e perciò comprendono un angulo di quei pentagoni regolari(§ 211), le corde de' quali son dette pentagonali seconde (§ 213); dunque AB, ch' è sottes' a quell' angulo è pentagonale seconda di quel Dodecaedro, di cui per comodo della figura se ne vede sola una parte; ma questa per costruzione unisce gli anguli A B di due pentagoni aderenti opposti alla comune lor base CD, la retta dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 216. Dunque le pentagonali seconde uniscono nel Dodecaedro gli estremi corrispondenti de' lati opposti (§ 190).

COROLLARIO II.

§. 217. Ma convenendo negli anguli opposti del Dodecaedro estremi alterni de' suoi lati opposti (§ 191), le rette, che si tirano in esso da un suo angulo agli estremi de' lati convenuti nell'angul' opposto uniscono estremi corrispondenti de' lati opposti (§ 192); queste dunque son pentagonali seconde e perciò eguali(§ 213).

LEM-

LEMMA II.

§. 218. *Gli anguli, che forma ogni asse del Dodecaedro ne' lati di esso son eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè unit' ogni estremo dell' asse, o sia ognuno degli anguli, ne' quali termina l' asse (§ 195) cogli estremi de' lati convenuti nell' angul' opposto, si ànno sei trianguli relativament' equilateri, come fatti da sei pentagonali seconde (§ pr), sei lati del Dodecaedro, e l'asse comune; eguali son dunque gli anguli, che in questi forma l' asse ne' lati del Dodecaedro, perchè opposti all' eguali pentagonali seconde. C. D. D.

LEMMA III.

§. 219. *Nel Dodecaedro ogni asse è normale alla base triangule degli anguli, che unisce.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 15. Disegni ABCD quella piramide triangulare, che taglia da un Dodecaedro la base triangula BCD del suo angulo A (§ 24), e disegni AE quella parte dell' asse, che vien tagliata dalla stessa base BCD; si unisca in fine il punto E, in cui l' asse incontra il triangulo co' punti BCD.

Si dimostrano dal §. pr. eguali gli anguli in E, e perciò &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 220. Dalla total' eguaglianza de' trianguli ABE ACE ADE apparisce di vantaggio, che gli assi nel Dodecaedro incontrino le basi triangule de' di loro anguli giusto nel centro.

COROLLARIO II.

§. 221. E poichè eguali son le altezze delle piramidi eguali simili, e similmente poste; saranno perciò nel Dode-

decaedro le parti, che dagli assi tagliano le basi de' rispettivi anguli tutt'eguali.

PROPOSIZIONE IV.

§. 222. *Gli anguli, che ne' Dodecaedri fanno gli assi ne' rispettivi lati son tutti assolutamente, e relativamente eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I. ABCD FGHI rappresentino due'piramidi angulari, che dallo stesso Dodecaedro àn tagliate due sue basi triangule BCD GHI, ed AE FL disegnino le parti, che queste àn tagliate dai rispettivi assi. Fig. 15.

Essendo sì fatte piramidi in tutto simili, ed eguali (§ 30) soprapposte combacceranno; sicchè negandos' in tal caso anche la congruenza dell' asse AE coll' asse FL, e così l' eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati, verrebbe a dirsi essersi dallo stesso comun vertice calate su lo stesso comun piano due normali (§ 219); locchè ripugnando, converrà confessare la congruenza de-

degli assi, AE FL, e così l'eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati.

Fig.16. ABCD aFGH siano due piramidi angulari di diversi Dodecaedri, ed AE aI rappresentino le parti de' rispettivi assi. Si suppongano soprapposti, e combacciati gli eguali di loro anguli verticali A a (§ 3), essendo ciò fatto, gli anguli AGF AGH eguali agli anguli ACB ACD (§ 30); saranno i lati GF GH parallelli ai lati CB CD, e perciò il piano de' primi, cioè il triangulo FGH parallello al piano de' secondi, cioè al triangulo BCD; dal che essendo AE a questo normale (§ 219); sarà parimente normale al triangulo FGH; sicchè negandosi la congruenza di AE con aI, e così l'eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati; verrà parimente a dirsi, che dallo stesso comun vertice A siansi su lo stesso piano calate due normali; locchè ripugnando, sarà vera la congruenza degli assi, e perciò l'eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati; Saranno dunque assolutamente, e relativamente eguali &c. C. D. D.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

§. 223. *Nel Dodecaedro gli assi si dividono tutti nel medesimo punto bifariam, e sono eguali, e quel punto si è il centro del Dodecaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Due qualunque contigui anguli del Dodecaedro siano segnati con A B, e l'angulo opposto ad A con S, l'opposto a B con T, si credano tirati gli assi AS BT, ed unit'i punti AT BS. Figura solida.

Gli anguli S T opposti per costruzione ai due contigui A B debbono esser parimente contigui, e perciò tramezzati dal lato ST opposto ad AB (§ 193), e perciò allo stesso parallello (§ 208); ma son questi anche eguali (§ 1); dunque ABST è parallellogrammo; ma se gli assi uniscono gli estremi alterni de' lati opposti (§ 196) son le diagonali di sì fatto parallellogrammo AS BT assi del Dodecaedro; questi dunque si dividono in un punto O *bifariam*. Collo stesso me-

metodo si dimostra, che collo stesso AS si dividano *bifariam*, e perciò nello stesso punto O gli assi degli altri due anguli parimente contigui allo stesso angulo A (§ 8), e che con quelli di questi primi quattro anguli si dividano *bifariam*, e perciò nello stesso punto O gli altri sei assi, che calansi da altri sei anguli contigui ai tre, che son contigui ad A; ma dieci son gli assi del Dodecaedro; tutti dunque si dividono nello stesso punto O *bifariam*.

II. Nel triangulo ABO vi son gli angul'in A B eguali perchè fatti dagli assi ne'lati; eguali son dunque i lati AO BO, cioè i semiasi, e perciò anche gli asi.

III. Il punto, in cui tutti gli eguali asi si dividon *bifariam* equidista dagli anguli tutti del Dodecaedro; ma equidistando dagli anguli si mostra equidistar parimente dai piani, e lati tutti dello stesso, come nel (§ 75); quel punto dunque si è il centro del Dodecaedro; e perciò nel Dodecaedro gli asi &c.C.D.D.

CO-

COROLLARIO I.

§. 224. Al Dodecaedro dunque è circoſcrittibile, ed iſcrittibile la Sfera; e l'aſſe del Dodecaedro è lo ſteſſo, che l'aſſe della Sfera circoſcrittibile ad eſſo, ed *inverſe* quello della Sfera è lo ſteſſo, che l'aſſe del Dodecaedro iſcrittibile in eſſa.

COROLLARIO II.

§. 225. Avendo veduto, che le normali calate dal centro del Dodecaedro incontrino i ſuoi piani tutti nel centro, come nel (§ 75); lo ſteſſo farà la Sfera iſcritta nel medeſimo.

COROLLARIO III.

§. 226. Eſſendo nel Dodecaedro parallell' i piani oppoſti, le normali, che dal ſuo centro calans' in due ſuoi piani oppoſti debbono eſſer in diretto, e così formare una retta, che, ſiccom'è diametro della Sfera al Dodecaedro iſcrittibile, così ſi dirà anche diametro del Dodecaedro;

ficchè il diametro del Dodecaedro è lo ftesso, che quello della Sfera iscrittibile in esso, ed *inverse*.

COROLLARIO IV.

§. 227. Se da punto a punto non può tirarsi, che una retta, nel Dodecaedro la retta, che unisce i centri di due suoi piani opposti è ad essi normal' e passa pel centro del Dodecaedro; ed è perciò un suo diametro.

COROLLARIO V.

§. 228. Nel Dodecaedro i diametri sono eguali, e tutti nel centro s'intersegan *bifariam*.

COROLLARIO VI.

§. 129. Il notato parallellogrammo ABST, ed ogni altro, che similmente nasce nel Dodecaedro unendo gli estremi corrispondenti di due suoi lati opposti, cioè quello, che nasce tra due pentagonali seconde (§ 217), e due suoi lati opposti

posti, è rettangulo, avendo per diagonali due eguali assi del Dodecaedro; dal che 1.° sarà nel Dodecaedro il quadrato dell' asse eguale ai quadrati del lato, e della pentagonale seconda. 2.° Ognuno di sì nati rettanguli è equale al quadrato della pentagonale prima (§ 214).

COROLLARIO VII.

§. 130. Nel Dodecaedro gl'interni suoi rettilinei sono equidistanti dal centro, giacchè eguali son le parti, che questi tagliano dagli eguali semiassi, che son ad essi normali (§ 219).

PROPOSIZIONE VI.

§. 231. *Nel Dodecaedro l'ass' è maggior del doppio del lato.*

DIMOSTRAZIONE.

A B C D E F G H

Sia AB pentagonale seconda CD prima EF lato, GH asse dello stesso Dodecaedro.

Essen-

Essendo per ipotesi AB pentagonale seconda CD prima, sarà AB la stessa, che la sottes'all'angulo del pentagono regolare fatto in CD (§ 212), e perciò il quadrato di AB sarà maggior del doppio del quadrato di CD; ma per la stessa ragione il quadrato di CD è maggior del doppio del quadrato del lato EF (§ 198); dunque il quadrato di AB è molto maggior del quadruplo del quadrato del lato EF, e perciò AB è molto maggior del doppio del lato EF; ma il quadrato dell' asse GH supera il quadrato della pentagonale seconda AB per lo stesso quadrato del lato EF (§ 229); l'asse dunque GH è anche dippiù maggior del doppio del lato EF. C. D. D.

PROPOSIZIONE VII.

§. 232. *Se s'intendano nel Dodecaedro tutti tirat'i suoi assi resterà diviso in dodici piramidi pentagone simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Tutto si dimostra, come s'è il simile dimostrato dell' Ottaedro (§ 103).

CO-

COROLLARIO I.

§. 233. I Dodecaedri son duodecupli delle rispettive piramidi pentagone, e perciò son come quelle.

COROLLARIO II.

§. 234. Essendo l'altezza d'ogni sì nata piramide pentagona il semidiametro del Dodecaedro; sarà il Dodecaedro eguale alla piramide, che à la base eguale alla sua superficie l' altezza eguale al suo semidiametro.

COROLLARIO III.

§.235. Ma lo stesso può dirsi della piramide regolare del Cubo, dell'Ottaedro; sarà dunque a quest' il Dodecaedro in ragion composta da quella delle superficie, e de' semidiametri.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 236. *I Dodecaedri son in ragion triplicata de' lati.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Son, come le rispettive piramidi pentagone (§ 233); ma queste son anche relativamente simili, tali essendo le basi, perchè pentagoni regolari, tal'i trianguli superiori, avendo ciascuno due anguli di quelli, che formano gli assi de'Dodecaedri ne' rispettivi lati, e son questi assolutamente, e relativamente eguali (§ 222), e perciò sono in ragion triplicata de'lati omologhi, quali son i lati de' rispettivi Dodecaedri; son dunque i Dodecaedr' in ragion triplicata de' lati. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 237. Dalla simiglianza anche relativa delle piramidi pentagone de'Dodecaedri, segue, che siano in essi, come i lati i semiassi, ed i semidiametri, e perciò anche gli assi, i diametri.

COROLLARIO II.

§. 238. Ed essendo in essi gli assi, i diametri assi delle Sfere circoscritte, ed iscritte; saranno i Dodecaedri, come le Sfere circoscritte, ed iscritte.

PROPOSIZIONE IX.

§. 239. *Il Dodecaedro circoscritto sta all' iscritto alla stessa Sfera, come la Sfera circoscritta all' iscritta allo stesso Dodecaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimostra dal (§ pr), come nel (§ 110).

LEMMA.

§. 240. *Nel Dodecaedro le corde sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Siano AB EF quattro pentagoni dello Fig. 14. stesso Dodecaedro aderenti nelle comuni basi CD GQ in modo, che serbino tra

loro

loro quella inclinazione, che ànno nel Dodecaedro, cosicchè le rette EF HK, che ne unifcono i centri, ci esibiscano due corde, ed AB EF, che unifcono i vertici alle comuni basi opposte due pentagonali seconde dello stesso Dodecaedro. Dai punti AB EF si calino su le rispettive comuni basi quattro perpendiculari, queste dovranno convenire in L I punti medii di quelle, e passare per gli rispettivi centri (§ 11).

Essendo ne' pentagoni regolari, ed eguali eguali le altezze (§ 12); e nel Dodecaedro eguali le pentagonali seconde (§ 212); saranno i trianguli ABL EFI relativamente equilateri; eguali avranno dunque gli anguli in L I; ma son ne' trianguli ELF HIK eguali anche i lati EL LF HI IK (§ 12); eguali son dunque le corde EF HK; lo che avendo sempre luogo; saranno nel Dodecaedro tutt' eguali le Corde. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 241. De' centri de' Pentagoni del Dodecaedro convenuti nello stess' angulo del

del medesimo ognuno equidista dagli altri due; le corde dunque di sì fatti pentagoni comprendono un triangulo equilatere sotto quell' angulo (§ 156).

COROLLARIO II.

§. 242. Tirate dunque nel Dodecaedro tutte le corde si avranno venti trianguli equilateri di lati eguali sotto i venti anguli del Dodecaedro.

COROLLARIO III.

§. 243. Ma sì fatti venti trianguli nascono da sole trenta corde (§ 15); nascon dunque così aderenti nel Dodecaedro dalle corde i trianguli, che comprendano un Solido, avente gli anguli ne' centri de' piani del Dodecaedro.

COROLLARIO IV.

§. 244. Ma essendo ogni pentagono del Dodecaedro aderente ad altri cinque pentagoni del medesimo (§ 5) si troveranno nel centro d' ogni pentagono del

Do-

Dodecaedro, tirate in esso tutte le corde, cinqu' estremi di corde, che ivi comprendono cinque anguli di trianguli equilateri (§ 241) gli anguli dunque del Solido, che nasce nel Dodecaedro dalle corde son tutti compresi da cinque anguli di trianguli equilateri.

AVVERTIMENTO.

§. 245. I piani, che aderiscono in modo, da restarne ogni di lor lato a due di essi comune (come fanno i trianguli nati nel Dodecaedro dalle corde, restando compresi venti trianguli da trenta corde) non possono non comprendere un Solido; giacchè ove si dica lo spazio non terminato da uno di quei piani, debbono ivi ammettersi dei termini, dei quali ciascuno ad un solo di quei piani appartenga; locchè è contro l' ipotesi.

PROPOSIZIONE X.

§. 246. *Tirate nel Dodecaedro tutte le corde resta in esso iscritto un Icosaedro.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nel Dodecaedro tutte le corde nasce in esso un Solido terminato da venti eguali triangoli equilateri (§ 243); ma son questi così combinati, che da cinque de' di loro angoli sia compreso ogni angolo di tal Solido (§ 244); Tirate dunque nel Dodecaedro tutte le corde nasce in esso un Icosaedro; ma à questo gli angol' in tutt' i piani del Dodecaedro; Tirate dunque nel Dodecaedro tutte le corde resta in esso iscritto un Icosaedro (§ *16*) C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 247. Avendo l' Icosaedro nato nel Dodecaedro dalle corde i suoi angoli ne' centri de' piani del Dodecaedro (§ 144); ed essendo eguali nel Dodecaedro le rette, che uniscono i centri de' suoi piani opposti, ed intersegandosi tutte nello stesso punto *bifariam* (§ 228); dovrem riconoscere nell' Icosaedro un punto equidistante dagli angoli; e perciò riconoscerlo iscrittibile alla Sfera.

COROLLARIO II.

§. 248. Incontrando l'Icosaedro, che resta iscritto nel Dodecaedro dalle corde i piani di questo tutti nel centro, come fa la Sfera iscritta nel medesimo; sarà l'Icosaedro, che iscrivono nel Dodecaedro le corde iscrittibile a quella Sfera, cui è circoscrittibile il Dodecaedro.

CAPO



CAPO VI.

Dell' Icosaedro.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 249. L'Icosaedro è quel Solido Regolare terminato da venti triangoli, e perciò regolari, ed eguali, così combinati, che da cinque de' di loro angoli si comprenda ogni solido suo angolo.

COROLLARIO.

§. 250. Gli angoli solidi dell' Icosaedro son dodici, giacchè son sessanta gli angoli de' suoi piani.

DEFINIZIONE II.

§. 251. De' cinque lati, che convengono in ogni angolo dell' Icosaedro se ne dirà ciascuno insistente a quei due, che non li sono contigui (cioè, co' quali non appartiene allo stesso triangolo) al piano, che passa per essi, ed all' angolo, che comprendono.

DEFINIZIONE III.

§. 252. Si diran lati opposti dell' Icosaedro quelli, che insistono a quegli angoli di due suoi triangoli aderenti, che si oppongono alla comune lor base.

AVVERTIMENTO.

§. 253. In seguito della stessa già notata uniformità dalla regolarità inseparabile si osserva, che nell' Icosaedro, egualmente, che nel Dodeacedro, quei lati, che da una banda insistono a quegli angoli di due suoi triangoli aderenti, che si oppongono alla comune lor base, lo

stesso

stesso facciano cogli altri estremi dall'altra banda.

COROLLARIO.

§. 254. Nell'Icosaedro dunque ad ogni lato non ne è opposto, che uno.

DEFINIZIONE IV.

§. 255. Poichè si mostreranno parallel' i lati opposti dell'Icosaedro; potran perciò in essi distinguersi gli estremi corrispondenti, e gli alterni (§ 42); sicchè i primi saran quelli, che insistono a vertici opposti alla stessa comune base, i secondi a diversa; e quindi potran dirsi nell' Icosaedro.

DEFINIZIONE V.

§. 256. Angoli opposti quelli, ne' quali son gli estremi alterni de' lati opposti.

AVVERTIMENTO.

§. 257. Quanto in seguito dell' uniformità si osserva nel Dodecaedro nelle

relazioni de' ſuoi lati, tanto egualmente à luogo ne' lati dell' Icoſaedro; quindi de' dieci eſtremi de' lati, che convengono nell' Icoſaedro in due ſuoi angoli oppoſti, non ſoli due, ma tutti ſono alterni di lati oppoſti.

COROLLARIO I.

§. 258. Ad ogni angolo dunque dell' Icoſaedro non ne è oppoſto, che uno.

COROLLARIO II.

§. 259. Ed a due ſuoi angoli contigui debbon opporſene altri due anche contigui, ed i lati, che li tramezzano ſono oppoſti.

COROLLARIO III.

§. 260. Così parimente a tre ſuoi angoli annularmente contigui, quali ſon quelli, ne' quali ſon gli angoli dello ſteſſo ſuo triangolo debbon opporſene altri tre anche annularmente contigui, cioè, ne' quali ſon parimente i tre angoli di altro ſuo iſteſſo triangolo, ed i

lati

lati perciò del primo triangolo debbono relativamente opporsi ai lati del secondo.

COROLLARIO IV.

§. 261. Così finalmente, poichè sono i lati stessi dell'Icosaedro quelli, ch' esibiscono gl' interni suoi rettilinei, e questi son pentilateri (§ 21), perciò, siccome posson distinguersi nell' Icosaedro cinque angoli annularmente contigui, quelli cioè, ne' quali son gli angoli d' uno stesso suo interno pentilatere; così dobbiam dire, che a cinque tali angoli debbano opporsene altri simili cinque, cioè, ne' quali anche siano gli angoli di altro suo interno pentilatere; dal che potran dirsi nell' Icosaedro.

DEFINIZIONE VI.

§. 262. Triangoli, o pentagoni opposti quelli, che son terminati da lati relativamente opposti.

DEFINIZIONE VII.

§. 263. Si diranno assi dell' Icosaedro quelli, che uniscono due suoi angoli opposti.

COROLLARIO I.

§. 264. Gli assi uniscono gli estremi alterni de' lati opposti (§ 256), e sono perciò le diagonali di quel parallelogrammo, che nascerebbe unendo gli estremi corrispondenti de' lati opposti, essendo questi paralleli (§ 42).

COROLLARIO II.

§. 265. Gli assi dell' Icosaedro son sei (§ 150).

DEFINIZIONE IX.

§. 266. Siccome si dimostreranno in un piano, e regolari gl' interni pentagoni dell' Icosaedro; così si diranno pentagonali dell' Icosaedro le corde di sì fatti suoi pentagoni.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

§. 267. *Gl' interni rettilinei dell' Icosaedro sono in un piano e son pentagoni regolari.*

DIMOSTRAZIONE.

I. e II. L'Icosaedro è equilatero (§ 27), ed è iscrittibile alla Sfera (§ 247); gl' interni dunque suoi rettilinei sono in un piano, ed iscrittibili al cerchio (§ 83); ma son questi pentilateri (§ 21), e son equilateri (§ 28), ed i rettilinei equilateri, ed iscrittibili al cerchio son regolari (§ 85); gl' interni dunque rettilinei dell' Icosaedro sono in un piano, e son pentagoni regolari. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 268. Gl'interni pentagoni dello stesso Icosaedro, o d' Icosaedri di lati eguali son anche simili, ed eguali (§ 20, e 28), e quelli d' Icosaedri di lati ineguali solo simili; e così del pari può dirsi, che le piramidi angolari dello stesso Icosaedro,

o

o d'Icosaedri di lati eguali sian simili, ed eguali, e quelle d'Icosaedri di lat' ineguali solo simili.

COROLLARIO II.

§. 269. Le pentagonali dell'Icosaedro son tutt'eguali (§ 200), ed in divers' Icosaedri sono ai lati proporzionali (§ 199).

COROLLARIO III.

§. 270. Ad ogni pentagonale dell'Icosaedro sarà parallelo quel lato dello stesso, che l'è opposto (§ 199).

COROLLARIO IV.

Fig. 8. §. 271. E poichè de' triangoli aderenti appartenenti allo stesso Icosaedro tanto i lati CA CD, quanto gli altri BA BD comprendono angoli di pentagon' Icosaedrici, essendo i primi parte della base pentagona dell'angolo, che nasce in B, i secondi parte della base pentagona dell' angolo, che nasce in C; perciò 1.° Ogni corda pentagonale dell' Icosaedro unisce

di

di due suoi triangoli aderent' i vertici opposti alla comune lor base; e perciò unisce gli estremi corrispondenti de' lati opposti (§ 255). 2.° Ogni pentagonale dell' Icosaedro potrà considerarsi appartenere a due pentagoni del medesimo; dal che dovranno ad ogni pentagonale opporsi due lati dell' Icosaedro (§ 198), ed esser perciò, come lo sono a quella (§ 199) anche tra se paralleli.

AVVERTIMENTO.

§. 272. Si noti, che i lati, che nell' Icosaedro insistono a quegli angoli de' suoi triangoli aderenti, che si oppongono alla comune lor base, i lati, cioè, opposti dell'Icosaedro (§ 253), son quelli, che si oppongono alla stessa sua pentagonale. Figura solida.

COROLLARIO I.

§. 273. Nell' Icosaedro i lati opposti son paralleli; e poichè son pentagonali dell' Icosaedro le rette, che in esso uniscono gli estremi corrispondenti de' lati opposti (§ 271), saranno anche sì fatte pentagonali parallele.

CO-

COROLLARIO II.

§. 274. Nell'Icosaedro son paralleli i triangoli, ed i pentagoni opposti.

LEMMA.

§. 275. *I dieci angoli, che fa ogni asse dell'Icosaedro ne' lati della stessa sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Figura solida. Convenendo negli angoli opposti dell'Icosaedro estremi alterni de' suoi lati opposti (§ 257) uniranno nell'Icosaedro estremi corrispondenti di lati opposti quelle rette, che tiransi in esso da un suo angolo agli estremi de' lati convenuti nell'angolo opposto, e saran queste perciò corde pentagonali dell'Icosaedro(§ 271), e perciò eguali (§ 269); Se si supponga dunque nell'Icosaedro tirato un asse, e le dieci corde pentagonali, che àn luogo tra ciascuno degli angoli, che unisce l'asse, e gli estremi de' lati convenuti nell'

nell' angol' oppoſto, ſi avranno dieci triangoli relativamente equilateri, come fatti da dieci eguali lati dell' Icoſaedro, dieci eguali pentagonali, e l' aſſe comune; ſarà dunque vero ciocchè D. D.

LEMMA II.

§. 276. *Nell' Icoſaedro ogni aſſe è normale alle baſi pentagone degli angoli, che uniſce.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimoſtra dall' eguaglianza degli angoli, che ogni aſſe fa ne' lati dell' Icoſaedro, come nel (§ 218).

COROLLARIO.

§. 277. Dalla ſteſſa dimoſtrazione appariſce, che ogni aſſe dell' Icoſaedro incontri nel centro le baſi degli angoli, che uniſce.

PROPOSIZIONE II.

§. 278. *Gli angoli, che fanno gli aſſi degli Icoſaedri ne' lati di eſſi ſon tutti aſſolutamente, e relativamente eguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Si dimostra dall' assoluta, e relativa somiglianza delle angolari piramidi degl' Icosaedri (§ 268) e dall' esser normali gli assi alle basi pentagone di queste (§ pr), come nel (§ 221).

AVVERTIMENTO.

§. 279. Essendosi lo stesso dimostrato della Piramide (§ 36), dell' Ottaedro (§ 99), del Cubo (§ 150), del Dodecaedro (§ 221); potrà dirsi, che in ciascuna specie de' Solidi Regolari siano gli angoli, che fanno gli assi ne' lati di essi assolutament', e relativament' eguali.

PROPOSIZIONE III.

§. 280. *Nell' Icosaedro gli assi tutt' in un punto si dividon bifariam, e sono eguali, ed è quel punto il centro dell' Icosaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

I. S'intendano uniti gli angoli contigui A B con i diloro opposti M I; e perciò anche contigui (§ 259) per mezzo degli assi AM BI, e s' intendano uniti i punti AI BM Figura solida.

I lati AB MI tramezzando angoli relativamente opposti saranno opposti (§ 259); e perciò paralleli (§ 273); ma son anch' eguali (§ 1); dunque ABMI è un parallelogrammo; di cui essendo diagonali gli assi AM BI (§ 264); dovranno questi in un punto O dividersi *bifariam*; ma, essendo allo stesso angolo A contigui altri quattro angoli dell' Icosaedro (§ 8); potrà nella stessa maniera mostrarsi, che collo stesso asse AM si dividan *bifariam*, e perciò nello stesso punto O altri quattro assi dell' Icosaedro, e questi non sono, che sei (§ 265); tutti dunque gli assi dell'Icosaedro si dividono nello stesso punto O *bifariam*.

II. Nel triangolo ABO vi sono gli angoli in A B eguali perchè fatti dagli assi ne' lati; eguali son dunque i lati

AO

AO BO, cioè i semiassi, e perciò anche gli assi.

III. Il punto in cui gli eguali assi si dividon *bifariam* equidista dagli angoli tutti dell'Icosaedro; ma, se lo stesso si unischi co' centri de' piani si vedranno sì fatte rette ai piani normali, ed eguali; e se si unisca co' punti medii de' lati si vedranno queste altre ai lati perpendiculari, ed eguali, come nel §74; è dunque quel punto il centro dell'Icosaedro, e perciò nell'Icosaedro gli assi &c. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 281. All'Icosaedro è circoscrittibile, ed iscrittibile la Sfera; e sarà l'asse dell' Icosaedro lo stesso, che l'asse della Sfera circoscrittibile ad esso; sicchè potrà dirsi, che sian tutt'i Solidi Regolari alla Sfera circoscrittibili, ed iscrittibili; e perciò essendo tutti equilateri (§27); potrà dirsi di tutti, che abbiano gli estremi de' lati convenuti nello stess'angolo, nello stesso piano (§83).

COROLLARIO II.

§. 282. Essendo nell'Icosaedro normali ai suoi piani le rette, che uniscono il suo centro con quelli de' piani, ed essendo in esso parallel' i piani opposti; di sì fatte rette quelle che appartengono ai piani opposti saranno in diretto; sicchè 1.° nell' Icosaedro quella retta, che unisce i centri di due suoi piani opposti è a questi normale, e passa pel suo centro; e sarà questa detta diametro dell' Icosaedro, siccom' è diametro della Sfera iscrittibile in esso; dal che il diametro dell' Icosaedro è lo stesso, che quello della Sfera iscrittibile in esso, ed *inverse*. 2.° Nell' Icosaedro son dieci i diametri, sono eguali, e tutti nel centro si dividon *bifariam*.

COROLLARIO III.

§. 283. Essendo nell' Icosaedro eguali gli assi, ed eguali le parti, che da questi tagliano gl' interni suoi pentagoni, perchè altezze delle sue simili, ed egua-

AO BO, cioè i semiassi, e perciò anche gli assi.

III. Il punto in cui gli eguali assi si dividon *bifariam* equidista dagli angoli tutti dell' Icosaedro; ma, se lo stesso si unischi co' centri de' piani si vedranno sì fatte rette ai piani normali, ed eguali; e se si unisca co' punti medii de' lati si vedranno queste altre ai lati perpendiculari, ed eguali, come nel § 74; è dunque quel punto il centro dell' Icosaedro, e perciò nell'Icosaedro gli assi &c. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 281. All'Icosaedro è circoscrittibile, ed iscrittibile la Sfera; e sarà l'asse dell' Icosaedro lo stesso, che l'asse della Sfera circoscrittibile ad esso; sicchè potrà dirsi, che sian tutt'i Solidi Regolari alla Sfera circoscrittibili, ed iscrittibili; e perciò essendo tutti equilateri (§ 27); potrà dirsi di tutti, che abbiano gli estremi de' lati convenuti nello stess'angolo, nello stesso piano (§ 83).

CO-

COROLLARIO II.

§. 282. Essendo nell'Icosaedro normali ai suoi piani le rette, che uniscono il suo centro con quelli de' piani, ed essendo in esso paralleli i piani opposti; di sì fatte rette quelle che appartengono ai piani opposti saranno in diretto; sicchè 1.° nell' Icosaedro quella retta, che unisce i centri di due suoi piani opposti è a questi normale, e passa pel suo centro; e sarà questa detta diametro dell' Icosaedro, siccom' è diametro della Sfera iscrittibile in esso; dal che il diametro dell' Icosaedro è lo stesso, che quello della Sfera iscrittibile in esso, ed *inverse*. 2.° Nell' Icosaedro son dieci i diametri, sono eguali, e tutti nel centro si dividon *bifariam*.

COROLLARIO III.

§. 283. Essendo nell' Icosaedro eguali gli assi, ed eguali le parti, che da questi tagliano gl' interni suoi pentagoni, perchè altezze delle sue simili, ed egua-

li piramidi angolari (§ 268); farà nell' Icosaedro il centro equidistante anche dagl'interni suoi piani.

COROLLARIO IV.

§. 284. Avendo veduto nel parallelogrammo ABMI, ed in ogni altro, che nasce nell' Icosaedro dalle corde, che uniscono gli estremi corrispondenti di due suoi lati opposti, eguali le diagonali, cioè gli assi; sarà 1.° Ogni sì fatto parallelogrammo rettangolo. 2.° Sarà nell'Icosaedro il quadrato dell' asse eguale ai quadrati del suo lato, e sua pentagonale. 3.° Poichè il quadrato della corda di un pentagono regolare è maggior del doppio del quadrato del lato dello stesso pentagono; sarà nell'Icosaedro il quadrato dell' asse maggior del triplo di quello del lato. 4.° Essendo negl' Icosaedri le pentagonali come i lati, saranno in essi come i lati anche gli assi; e saranno in fine negl' Icosaedr' i rettangoli, che nascono in essi tra i lati opposti, e le pentagonali corrispondenti assolutamente e relativamente simili.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

§. 285. *Se s' intendano nell' Icosaedro tutti tirat' i suoi assi resterà diviso in venti piramidi triangolari, simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimostra dall'eguaglianza, ed intersezione *bifariam* degli assi, e diametri, come nel (§ 103).

COROLLARIO I.

§. 286. L' Icosaedro è ventuplo d'ogni sua sì fatta piramide.

COROLLARIO II.

§. 287. Gl' Icosaedri son tra loro, come tali di loro rispettive piramidi.

COROLLARIO III.

§. 288. Essendo l' altezza d' ogni sì fatta piramide il semidiametro dell' Icosaedro; sarà l' Icosaedro eguale alla Pira-

 mide,

mide, che à la base eguale alla sua superficie, l'altezza eguale al suo semidiametro.

COROLLARIO IV.

§. 289. Ma lo stesso si vidde della Piramide, dell' Ottaedro, del Cubo, del Dodecaedro; saranno dunque i Solidi Regolari in ragion composta da quella delle superficie, e de' semidiametri.

PROPOSIZIONE V.

§. 290. *Gl' Icosaedri sono in ragion triplicata de' lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Son gl' Icosaedri come le di loro rispettive piramidi triangolari (§ 287); ma son queste anche relativamente simili (tali essendo le basi perchè triangoli equilateri, tal' i triangoli verticali, avendo ognuno due angoli, che fanno gli assi ne' lati de'rispettivi Icosaedri), e perciò in ragion triplicata de' lati omologhi, cioè de' lati de' rispettiv' Icosaedri; son dun-

dunque gl'Icosaedr' in ragion triplicata de' lati. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 291. Se nelle piramidi simili, e similmente poste sono le altezze come i lati; saranno negl'Icosaedri, come i lati anche i semidiametri, e perciò i diametri.

COROLLARIO II.

§. 292. Ma son negl' Icosaedri come i lati anche gli assi (§ 284), e sono in essi gli assi, i diametri assi delle sfere circoscritte, ed iscritte in essi (§ 281, e 282); saran dunque gl' Icosaedri, come le sfere circoscritte, ed iscritte in essi.

PROPOSIZIONE VI.

§. 293. *L' Icosaedro circoscritto è all' iscritto alla stessa Sfera, come la Sfera circoscritta all' iscritta allo stesso Icosaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimoſtra dal (§ pr.), come nel (§ 110).

COROLLARIO.

§. 294. Il lato dell'Icoſaedro circoſcritto ſta a quello dell'iſcritto alla ſteſſa Sfera, come il ſuo aſſe al ſuo diametro.

LEMMA.

§. 295. *Nell' Icoſaedro la pentagonale è minor del doppio dell' altezza de' ſuoi triangoli.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 8. Appartengano allo ſteſſo Icoſaedro gli aderenti triangoli ABC DBC, e ſiano così inclinati nella comune baſe BC, che la retta AD, che ne uniſce i vertici a quella oppoſti eſibiſca la pentagonale dello ſteſſo Icoſaedro (§ 271). Dai punti A D ſi calino ſu la comune baſe BC due perpendiculari, queſte converranno nel ſuo punto medio M, e formeranno così con AD un triangolo (§ 11).

Ne'

Ne' triangoli ogni lato è minor della ſumma degli altri due; dunque AD è minor della ſumma di AM MD; ma queſte, come altezze di eguali triangoli equilateri ſono eguali; dunque AD pentagonale dell' Icoſaedro è minor del doppio di DM altezza di un triangolo del medeſimo. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 296. Che debbano le altezze AM DM comprendere un angolo, e quindi formar con AD un triangolo, come ſi è fatto dalla figura eſibire, appariſce dall' eſſer ogni triangolo dell' Icoſaedro non in diretto, ma inclinato cogli altri aderenti, altrimente ſarebbe l'Icoſaedro terminato in qualche parte da rombo, e non triangolo, e dal non poter avere una retta parte in un piano, e parte in un altro.

COROLLARIO.

§. 297. Sicchè nell' Icoſaedro il quadrato della pentagonale è minor del quadruplo di quello dell' altezza di un ſuo triangolo.

PROPOSIZIONE VII.

§. 298. *L'asse dell' Icosaedro è minor del doppio del lato del medesimo.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 17. Rappresenti ABIM uno di quei rettangoli, che fanno nell' Icosaedro le sue pentagonali, che uniscono due lati opposti di esso (§ 284); cosicchè siano AB IM, lati, AI BM pentagonali; ed in questo sii tirata la diagonale AM asse dello stesso Icosaedro (§ 284); e rappresenti parimente RST un triangolo dello stesso Icosaedro, in cui sii calata l' altezza TV.

Per la costruzione AMq = ABq + BMq, ed RTq = RVq + VTq; sicchè sarà AMq: RTq :: ABq. + BMq : RVq + VTq; ma per la stessa costruzione AB = RS, e perciò ABq è quadruplo di RVq; BMq è minor del quadruplo di VTq (§ pr); dunque AMq è minor del quadruplo di RTq, e perciò AM asse è minor del doppio di RT lato dello stesso Icosaedro. C. D. D.

CO-

COROLLARIO I.

§. 299. Il quadrato dell' asse dell' Icosaedro è maggior del triplo (§ 288), minor del quadruplo del quadrato del lato dello stesso.

COROLLARIO II.

§. 300. Il lato dell' Icosaedro è maggiore del semiasse del medesimo, o sia ragio della Sfera circoscrittibile ad esso (§ 281).

LEMMA I.

§. 301. *Nell' Icosaedro ogni corda è parallela ad una sua pentagonale, ed è la terza sua parte.*

DIMOSTRAZIONE.

ABC DBC rappresentino due triangoli dello stesso Icosaedro, così aderenti in BC, che la retta EF, che ne unisce i centri, esibisca la corda dello stesso Icosaedro, e la retta AD, che unisce i Fig. 8.

ver-

vertici alla comune base opposti la pentagonale del medesimo (§ 271). Dai punti A D si calino su la comune base due perpendicolari, queste passaranno per gli rispettivi centri, e converranno nello stesso suo punto medio M (§ 11).

I. La corda EF dividendo proporzionalmente (§ 37) i lati AM DM del triangolo ADM, sarà parallela alla pentagonale AD altro suo lato.

II. E sarà perciò AD : EF : : AM : ME; ma AM : ME : : come 3 : 1 (§ 38); dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 302. Nell' Icosaedro è parallela alla corda quella sua pentagonale, che unisce i vertici di quei triangoli, de' quali la corda unisce i centri.

COROLLARIO II.

§. 303. Le corde nell' Icosaedro son tutt' eguali; e negl' Icosaedri sono alle pentagonali, e perciò anche ai lati (§ 269) proporzionali.

LEMMA

LEMMA I.

§. 304. *Le corde, che unifcono i centri di quei triangoli convenuti nello ftefs' angolo dell' Icofaedro fon in un piano, e comprendono un pentagono regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

ABCDEF rapprefenti quella piramide Fig. 11. pentagona, che taglia da un Icofaedro la bafe pentagona BCDEF del fuo angulo A; fiano ne' triangoli convenuti nell' angolo A tirate le corde, e nel fottopofto pentagono BCDEF le pentagonali.

Le corde GH HI fon parallele alle pentagonali BD CE (§ 302); il piano dunque dell' angolo GHI è parallelo al piano delle pentagonali, cioè del pentagono BCDEF; fimilmente le corde IK KL fon parallele alle pentagonali DF EB, e perciò il piano dell' angolo IKL è parallelo al piano di quelle pentagonali, e così allo fteffo piano del pentagono; i piani dunque degli angoli GHI

IKL

IKL sono un istesso piano, altrimente sarebbero anche paralleli tra loro, e si sarebbero incontrati; ma nello stesso piano di questi angoli pogia gli estremi la quinta corda GL; tutte dunque sì fatte corde son nello stesso piano.

II. Ma queste sono eguali, e comprendono angoli a quelli del pentagono eguali, essendo ciascuna coppia di esse perchè parallela ad una coppia delle sottoposte pentagonali, parallela del pari alla coppia de' lati del pentagono a quelle opposti; comprendono dunque un pentagono regolare. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 305. Tirate dunque nell' Icosaedro tutte le corde restaranno in esso descritti sotto i dodici suoi angoli solidi dodici pentagoni regolari di lati anche relativamente eguali (§ 303).

COROLLARIO II.

§. 306. Ma sì fatti dodici pentagoni nascono da sole trenta corde (§ 15); nascono dunque così aderenti nell' Icosaedro

saedro dalle corde i pentagoni, che comprendano un Solido (§ 245) avente gli angoli ne' centri de' piani dell'Icosaedro.

COROLLARIO III.

§. 307. Ma essendo ogni triangolo dell' Icosaedro aderente ad altri tre triangoli del medesimo, si troveranno nel centro d' ogni triangolo del medesimo, tirate in esso tutte le corde, tre estremi di corde, che ivi comprendono tre angoli di quei pentagoni; gli angoli dunque del Solido, che nasce nell' Icosaedro dalle corde son tutti compresi da tre angoli de' suoi pentagoni.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 308. *Tirate nell' Icosaedro le sue corde resta in esso iscritto un Dodecaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nell'Icosaedro le sue corde, nasce in esso un Solido terminato da dodici eguali pentagoni regolari, avente

gli

gli angoli ne' centri de' piani dell' Icosaedro (§ 306), e restando ognun de' suoi angoli compreso da tre angoli de' suoi pentagoni (§ pr); tirate dunque nell' Icosaedro le sue corde resta in esso iscritto un Dodecaedro (§ 185), C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 309. Incontrando il Dedecaedro iscritto nell' Icosaedro i piani di questo tutti nel centro, come fa la Sfera iscritta nel medesimo; sarà il Dodecaedro iscritto all' Icosaedro iscrittibile a quella Sfera, cui è l' Icosaedro circoscrittibile.

COROLLARIO II.

§. 310. Ma lo stesso si vidde nel Solido nato dalle corde nella Piramide, nel Cubo, nell' Ottaedro, nel Dodecaedro; sarà dunque ogni Solido Regolare nato in un altro dalle corde iscrittibile a quella Sfera, cui è quello circoscrittibile.

CO-

COROLLARIO III.

§. 311. I lati dell'Icosaedro circoscritto, e Dodecaedro iscritto alla stessa Sfera son, come il lato di un pentagono regolare alla terza parte della corda dello stesso pentagono (§ 301).

AVVERTIMENTO.

§. 312. Stabilitosi, che tutt' i Solidi Regolari comprendano il di loro centro, ch' è il fondamento della uniformità ad essi essenziale; e che sian perciò tutti alla Sfera iscrittibili; si vedrà, come corollario di sì fatta generale iscrittibilità, da quali, e quanti regolari rettilinei sia la superficie Sferica commensurabile, o sia in quali, e quanti eguali, e regolari curvilinei possa la medesima giustamente dividersi.

AVVERTIMENTO I.

§. 313. Un rettilineo si dirà adattato nella Sfera, se così sia immesso in essa, che tutt' i suoi angoli ne tocchino la

su-

ſuperficie; ſicchè adattati nella Sfera ſon tutt'i rettilinei de' ſolid' iſcritti in eſſa.

AVVERTIMENTO II.

§. 314. Se adattato nella Sfera un rettilineo ſi tirino agli angoli di eſſo tanti ragi della Sfera, e dai piani dei triangoli, che i ragi fanno nei lati del rettilineo, ſi faccia tagliare la ſuperficie Sferica, la parte, che da eſſa tagliano sì fatti piani, potrà dirſi un curvilineo sferico.

AVVERTIMENTO III.

§. 315. Se iſcritto nella Sfera un Solido Regolare ſi rinnovi la ſteſſa operazione in tutt'i ſuoi piani; reſterà diviſa la ſuperficie Sferica in tanti curvilinei sferici, quanti ſono i piani del Solido Regolare; reſterà perciò diviſa in quattro, otto, o venti triangoli Sferici, ſe ſia nella Sfera iſcritta una Piramide, un Ottaedro, un Icoſaedro, e reſterà diviſa in ſei quadrati Sferici, o dodici pentagoni Sferici, ſe ſia nella ſteſſa iſcritto un Cubo, o un Dodecaedro.

AV-

AVVERTIMENTO IV.

§. 316. Il Solido Regolare con tale operazione resterà diviso in quelle piramidi, nelle quali, è diviso da' suoi assi (1), e perciò simili, ed eguali (2); Or se a ciascuna di queste si consideri aggiunto quel Solido, ch' è compreso dalla base della Piramide, dal Curvilineo, ed archi corrispondenti, si vedrà sorto un Solido, che potrà dirsi una Piramide Sferica.

AVVERTIMENTO V.

§. 317. Iscritto nella Sfera un Solido Regolare, resterà la Sfera colla disegnata operazione divisa in tante piramidi Sferiche, quanti sono i piani del Solido; e son queste simili, ed uguali; im-

 per-

(1) Giacchè ne' Solidi regolari gli assi son gli stessi, che gli assi delle Sfere ad essi circoscrittibili; sicchè tutti, ed in tutti intersegandosi gli assi *bifariam*, s' intersegano nel centro della rispettiva sfera.

(2) Giacchè son tutte simili, ed eguali le piramidi, nelle qual' i solidi Regolari son divisi dagli assi.

perciocchè fatti di due di queste combaciar gli eguali angoli verticali (2), debbono combaciarne nell' intiera loro estensione tutti i piani superiori, come fatti da due eguali ragi, ed un arco simile, ed eguale; ed ove si negh' il combaciamento anche de' Curvilinei sferici, si ammetteranno nella sfera de' ragi ineguali, giacchè i vertici di sì fatte piramidi non sono, che nel centro della Sfera (§ 316).

COROLLARIO I.

§. 318. Siccome son tali le Piramidi, nelle quali resta diviso un Solido Regolare da suoi assi, che soprappostine gli angoli verticali debbono combaciare qualunque piano di una si faccia corrispondere a qualunque piano dell' altra; essendo eguali, e simili assolutamente, e relativamente tutti i triangoli superiori, regolari, simili, ed eguali le basi (§ 1); così perchè dacciò lo stesso onnimodo combaciamento deve aver luogo anche nelle

(2) Giacchè son tutte simili, ed eguali le piramidi, nelle qual' i solidi Regolari son divisi dagli assi.

nelle Sferiche Piramidi figlie dello stesso Solido Regolare; dovrem dire, che i curvilinei Sferici, nei quali resta divisa la superficie Sferica colla disegnata operazione, siano non solo simili, ed eguali, ma che possano meritare il nome di curvilinei sferici, regolari.

COROLLARIO II.

§. 319. Il triangolo dunque Sferico Piramidale è la quarta parte della superficie Sferica; l' Ottaedrale l'ottava, l'Icosaedrico la vigesima; il quadrilatere Sferico Cubico la sesta, il pentilatere Sferico Dodecaedrico la duodecima, dal che anche conoscesi qual ragione ciascuno di questi abbia col cerchio massimo della Sfera.

COROLLARIO III.

§. 320. Dal che saranno questi, nati nella stessa Sfera, tra loro in ragion inversa de'denominatori delle frazioni, dalle quali s' è veduta la di loro capacità additata; sicchè sarà il triangolo Sferico

Piramidale all'Ottaedrale : : 8 : 4 = 2 : 1 all' Icosaedrico : : 20 : 4 = 5 : 1; al quadrilatere Cubico : : 6 : 4 = 3 : 2; al pentilatere Dodecaedrico : : 12 : 4 = 3 : 1; e così negli altri.

COROLLARIO VI.

§. 321. Sarà dunque la Superficie Sferica esattamente commensurabile da quei soli curvilinei sferici regolari, che colla disegnata operazione nascono, iscritt' in essa i Solidi Regolari.

CAPO



CAPO VII.

E' de' soli piani, e Solidi Ordinati, o Regolari il comprendere il centro.

§. 222. **VEdutosi ne' Capi precedenti, che ciascun Piano, e Solido Ordinato, o Regolare comprenda il centro; si vedrà in questo, che se un rettilineo, o un Poliedro lo comprenda sia Ordinato, o Regolare; e si conoscerà così, esser de' soli piani, e Solidi Ordinati, o Regolari il comprenderlo; ed esser perciò dell'essenza dell'Ordine, e della Regolarità il comprendere un punto sì fatto.**

DEFINIZIONE.

§. 323. Un Solido terminato da piani, che comprenda un punto, come s'è veduto ne' Solidi Ordinati, o Regolari, equidistante dagli angoli, dai piani, dai

lati, si disegnerà col nome di Solido dell' ipotesi; quel punto sarà detto suo centro; le rette, che l'uniscono cogli angoli, o, che da esso calansi ai suoi piani normali si diranno semiassi di circoscrizione, e semidiametri d'iscrizione dello stesso.

COROLLARIO.

§. 324. Se il Solido dell'ipotesi è terminato da piani i suoi lati son linee rette, i suoi piani son rettilinei.

LEMMA I.

§. 325. *Se un rettilineo comprenda un punto equidistante dagli angoli, e dai lati è regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.18. Nel rettilineo ABCDE sia il punto F equidistante dagli angoli, e dai lati. Sia unito questo agli angoli, e sian dallo stesso calate ai lati le perpendiculari. Essendo per l'ipotesi F centro del rettilineo ABCDE, saranno isoscel' i triangoli

goli

goli FAB FBC FCD, FDE FEA; e perciò faranno i lati del rettilineo divisi *bifariam* dai suoi ragi d' iscrizione FG, FH, FI, FK, FL; ma essendo per la costruzione lo stesso quadrato di FA eguale tanto a quelli di AG, e GF, quanto a quelli di AL, e LF, e così quei due eguali a questi; ed essendo per l' ipotesi eguali quelli di FG FL; eguali saranno anche gli altri di AG AL, e perciò AB è eguale ad AE; locchè avendo egualmente luogo negli altri lati tutti; sarà il rettilineo ABCDE equilatere. Ma il rettilineo equilatere, ed iscrittibile al cerchio, com' è questo per l'ipotesi, è rogabile (§ 85); se un rettilineo dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 326. E' dunque de' soli rettilinei Ordinati, o Regolari il comprendere un punto dai lati, e dagli angoli equidistante.

LEMMA II.

§. 327. *Son tutti eguali i lati del Solido dell' ipotesi.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 19. Siano AB AC due lati qualunque convenut' in un angolo A del Solido dell'ipotesi, e sia O il centro di questo; si unischi questo co' punti ABC, e si calino dallo stesso su i lati AB AC le perpendiculari OD OE.

Essendo nel Solido dell' ipotesi il centro equidistante dagli angoli (§ 323); sarà equidistante dagli estremi de' lati; che non son, che negli angoli; saranno dunque eguali le rette OA OB OC; e così essendo i triangoli OAB OAC isosceli, saranno in essi i lati AB AC divisi *bifariam* dai ragi d' iscrizione OD OE; ma per la stessa costruzione lo stesso OAq. eguaglia tanto i quadrati di OD DA, quanto quelli di OE EA, e sono eguali quelli di OD OE, perchè misure delle distanze, che ànno dal centro i lati del Solido delle ipotesi; son dunque eguali anche quelli di AD AE, e perciò AB è eguale ad AC; ma nella stessa maniera si mostrano a questi eguali quegli altri lati convenuti negli stessi

an-

angoli ABC, ed a quelli gli altri, e così tutti; son dunque tutti egual' i lati del solido dell' ipotesi. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 328. I rettilinei del Solido dell' ipotesi son tutti assolutamente, e relativamente equilateri.

COROLLARIO II.

§. 329. Le perpendiculari, che dal centro del Solido dell' ipotesi si calano ai suoi lati, ne incontrano il punto medio; e perciò le rette, che in questo Solido unisciono il centro co' punti medii de' lati sono a questi perpendiculari, e sono eguali.

COROLLARIO III.

§. 330. Essendo questo Solido equilatere, ed iscrittibile alla Sfera; saranno gl' interni suoi rettilinei in un piano, ed iscrittibili al cerchio (§ 83).

LEMMA

LEMMA III.

§. 331. *La normale calata dal centro del Solido dell'ipotesi in qualunque suo piano ne incontra un punto equidistante dagli angoli, e dai lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 10. Il rettilineo ABCD disegni un piano del solido dell'ipotesi, e disegni E il suo centro; da questo si in quello calata la normale EO; il punto O sia unito agli angoli del rettilineo, e calate dallo stesso ai lati del rettilineo le perpendiculari OF OG OH OI, si unisca il punto E co' punti ABCD FGHI.

I. Essendo nel Solido dell' ipotes' il centro equidistante dagli angoli; saranno eguali le rette, e perciò i quadrati di AE BE CE DE, dal che saranno per la costruzione eguali le summe de' quadrati di AO EO, BO EO, CO EO, DO EO; sicchè tolto il comune di EO, resteranno egual' i quadrati, e perciò le rette AO BO CO DO; la normale dun-

que calata dal centro del Solido dell'ipotes' in qualunque suo piano ne incontra un punto equidistante dagli angoli : per II. Dacciò saranno i triangoli AOB BOC COD DOA isosceli, e perciò le perpendiculari da O calate ai lati AB BC CD DA ne avranno incontrat'i punti medii, e così le rette EF EG, EH EI sono eguali (§ 329); dal che, come nella prima parte si vedono egual' i quadrati, e perciò le rette OF OG OH OI; la normale dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 332. I piani del Solido dell'ipotesi comprendono un punto equidistante dagli angoli, e dai lati; e perciò sono iscrittibili, e circoscrittibili al cerchio.

COROLLARIO II.

§. 333. Essendo il triangolo AEO rettangolo in O; sarà il quadrato del ragio di circoscrizione del rettilineo del Solido dell'ipotesi la differenza de' quadrati del suo semiasse AE, e del suo semidiame-

tro

tro EO; ma sono in questo Solido eguali i semiassi, i semidiametri (§ 323); son dunque de'rettilinei dello stesso egual' i raggi di circoscrizione; cioè ne sono i rettilinei iscrittibil' in archj eguali.

PROPOSIZIONE I.

§. 334. *I rettilinei del Solido dell' ipotesi son regolari, simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Comprendono questi un punto dagli angoli, e dai lati equidistante (§332); son dunque regolari (§ 325).

II. e III. Son questi anche relativamente equilateri (§ 328), e son iscrittibili in cerchi eguali (§ pr.); ma gli eguali lati dagli eguali cerchj tagliano simili, ed eguali porzioni; son dunque gli angoli di questi anche relativamente compresi da simili, ed eguali porzioni; son dunque anche relativamente equiangoli; e perciò non solo regolari, ma simili, ed eguali. C. D. D.

CO-

COROLLARIO.

§. 335. I rettilinei dunque assolutamente, e relativamente equilateri, ed iscrittibil' in cerchj eguali sono regolari, simili, ed eguali.

LEMMA I.

§. 336. *Gl' interni rettilinei del Solido dell' ipotesi son tutti assolutamente, e relativamente equilateri.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo di questo Solido i piani rettilinei regolari, simili, ed eguali (§434); saranno tutte assolutament', e relativament' eguali le rette, che uniscono gli estremi de' lati convenuti nello stesso suo angolo; e perciò saran tutti gl' interni rettilinei dello stesso C. D. D. (§ 18).

LEMMA II.

§. 337. *Se in due Sfere eguali, che toccano un piano si adattino rett' eguali*

con

con un estremo nel rispettivo punto del contatto, e dai punti ne' quali gli altri estremi incontrano le rispettive superficie si facciano sezioni al piano parallele, queste son cerchj eguali.

DIMOSTRAZIONE.

Fig.21. Le date Sfer' eguali siano ABC DEF, che toccano il piano MN ne' punti BE, l' eguali rette in esse adattate siano BC EF, e siano in fine CI FK le sezioni, che passando per gli rispettivi punti CF sono parallele ad MN.

Dai punti B E siano tirat' i diametri AB DE, che incontrano le rispettive sezioni ne' punti G H; siano unit' i punti CA CH, FD FG, e finalmente per gli piani de' triangoli ABC DEF sian fatte nelle Sfere altre due sezioni AIBC DKEF.

Le sezioni AIBC DKEF, passandone ciascuna per costruzione pel diametro, e perciò pel centro della rispettiva Sfera, son cerchj massimi delle stesse; e son perciò AB DE i diametri di essi; sicchè i triangoli ABC DEF son rettangoli in

C F;

CF; e perciò essendo dall'ipotesi il quadrato di AB eguale a quello di DE; saranno quelli di AC CB eguali a quelli di DF FE; ma son dalla stessa ipotesi eguali quelli di BC EF; dunque anche gli altri, e perciò le rette AC DF; dal che saranno del tutto simili, ed egual' i triangoli ABC DEF; ma essendo i diametri AB DE normali ad MN, son anche tali ai piani delle rispettive sezioni CI FK parallele ad MN; passeranno dunque per gli rispettivi centri di quelle, e saran perciò ragi di esse HC GF; e saran questi perpendiculari ai rispettivi diametri AB DE; ma questi sonacciò le altezze de' triangoli ABC DEF simili, eguali, e similmente posti; son dunque eguali, e perciò sarà vero ciocchè D.D.

COROLLARIO I.

§. 338. E poichè tutte le rett' eguali a BC, ed EF adattate con un estremo in B, ed in E pogian gli altri in punti delle periferie delle rispettive sezioni CI FK (§ 81); perciò, se in due sfer' eguali siano adattate rette assolutamente, e

relativamente eguali cogli estremi di una banda in due punti di esse, queste pogeranno gli altri estremi nelle rispettive periferie di cerchj eguali.

AVVERTIMENTO.

§. 339. Lo stesso avviene, se le rette assolutamente, e relativamente eguali si adattino cogli estremi di una banda in due punti della stessa Sfera; pogeranno, cioè, queste anche gli altri estremi nelle periferie di cerchj eguali; nascendo sempre due triangoli rettangoli simili, ed eguali, perchè compresi da due eguali diametri, due eguali rette, ed altre due, che debbono anch'eguagliarsi per la notata ragione.

COROLLARIO II.

§. 340. Ma ne' lati degli stessi angoli di un Solido equilatere, ed iscrittibile alla Sfera, iscritto in questa, si avvera, che sian convenut'in tanti punti di essa gli estremi di una banda di rette assolutamente, e relativamente eguali; pogeran

ran dunque queste gli altri estremi nelle periferie di cerchj eguali; dal che saranno gl'interni rettilinei del Solido equilatere, ed iscrittibile alla Sfera non solo in un piano, ed iscrittibili al cerchio (§ 83); ma iscrittibili in cerchj eguali.

PROPOSIZIONE II.

§. 341. *Gl' interni rettilinei del Solido dell' ipotesi son regolari, simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Son questi assolutamente, e relativamente equilateri (§ 336), ed iscrittibil' in cerchj eguali (§ pr); son dunque come dovean dimostrarsi (§ 335).

PROPOSIZIONE III.

§. 342. *Il Solido dell'ipotesi è regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Sono i piani di questo regolari, simili, ed eguali (§ 334); ma, essendo anche tali gl' interni suoi rettilinei (§ pr) da

egual numero degli angoli di quelli è compreso ogni Solido suo angolo (§ 21); è dunque regolare (§ 1) C. D. D.

COROLLARIO.

§. 343. E' dunque de' soli Solidi Regolari, od Ordinati il comprendere un punto equidistante dagli angoli, dai piani, e dai lati. E' cioè tanto agli stessi essenziale un tale attributo, che solo basta, per assicurarci, che il Solido, che lo comprende, sia Ordinato, o Regolare.

AVVERTIMENTO.

§. 344. Resta a vedersi ne' Solidi Regolari l'Uniformità degli angoli solidi, e quanto questa importi di più dell'egualianza; ma trattandosi, che son gli angoli di questi Solidi compresi da egual numero di angoli piani non solo relativamente, ma anche assolutament' eguali (§ 1), sembrarebbe vano un tale assunto, se non se ne premetta una teoria, che ne mostri, ciò non ostante, la necessità; questo avrà luogo nel Capo, che segue.

CAPO



CAPO VIII.

Della misura degli angoli Solidi,
e
De' Solidi Innominati.

§. 345. CHe ci siano degli angoli Solidi eguali, che non possano combaciare, e che ce ne sian degli altri ineguali quantunque compresi da egual numero di angoli piani relativament' eguali, si vedrà in questo Capo, producendo dall' accoppiamento de' Solidi Regolari, e di loro segmenti altri due Solidi, che saran detti Innominati; perchè da non potersi riferire ad alcuna delle note, e nominate Classi de' Solidi; dal che conosciutasi meno estesa del bisogno la norma, che nella stima degli angoli Solidi può desumersi dal combaciamento, e più estesa quella, che può dedursi dagli angoli piani, che li com-

prendono, ſe ne fiſſa altra all' uopo proporzionata.

PARTE I.

Della miſura degli angoli Solidi.

DEFINIZIONE I.

§. 346. DUe angoli piani ſi diranno aderenti, ſe abbiano i vertici nel medeſimo punto, ed aderiſcano per un lato, che resta ad entrambi comune; e così ſi diranno aderent' in diretto, ſe ſiano nel medeſimo piano aderenti, ed inclinatamente aderenti, ſe ſtando in diverſi piani aderiſcano.

DEFINIZIONE II.

§. 347. Più angoli piani ſucceſſivamente aderenti ſi diranno annularmente aderenti, ſe ciaſcuno ad altri due aderiſca; giacchè allora l'ultimo della ſucceſſiv' aderenza è neceſſario, che anche al primo aderiſca; e così ſi diranno queſti angoli annularmente aderenti in diretto,

ſe

se sian tutti nel medesimo piano; ed annularmente, ed inclinatamente aderenti, se così siano in piani diversi.

DEFINIZIONE III.

§. 348. Un Solido terminato da piani à rettilinei tutti i suoi piani, giacchè rette sono le intersezioni dei piani; il punto, in cui in un Solido sì fatto convengono gli angoli de' suoi rettilinei si dice angolo del Solido, o sia angolo Solido.

COROLLARIO I.

§. 349. Gli angoli piani di un angolo Solido sono inclinatamente aderenti; giacchè appartengono ai diversi piani del Solido.

COROLLARIO II.

§. 350. Poichè tre sono le dimensioni del Solido, non potranno in un suo angolo convenir da meno di tre angoli de' suoi piani.

COROLLARIO III.

§. 351. Essendo nel Solido terminato da piani i suoi lati non altro, che le interfezioni de' suoi piani; ed essendo perciò ogni lato a due de' suoi piani comune, sarà nell'angolo di tal solido ogni lato a due de' suoi angoli piani comune; e perciò sarà in esso, 1.° il numero de' lati eguale a quello degli angoli, e non minore di tre (§ pr.); 2.° sarà ogni suo angolo piano ad altri due aderente, e perciò saran tutti annularmente aderenti (§ 347); 3.° ma son anche inclinatamente aderenti (§ 349); volendo dunque astratto dal Solido concepirsi il suo angolo, dovrà dirsi, che sia l'annulare, ed inclinata aderenza di più di due angoli piani.

COROLLARIO IV.

§. 352. Essendo l'angolo solido l'annulare, ed inclinat' aderenza di più di due angoli piani, da tre capi dipenderà la quantità dello stesso; dal numero, cioè, de' suoi angoli piani; dalla gran-

dezza

dezza di ciascuno di essi; e dall'inclinazione, con cui i piani degli angoli aderiscono.

AVVERTIMENTO.

§. 353. Siccome, cioè, ne' rettilinei, che non sono, che annulari, ed inclinati congiungimenti di rette, si desume la di lor quantità dal numero, e grandezza de' lati, e dalle inclinazioni, che questi ànno; così dal numero, e grandezza degli angoli piani, e dalle inclinazioni, che questi anno deve desumersi la quantità degli angoli solidi; e siccome in quelli l'assoluta, o relativa eguaglianza degli angoli segue l'assoluta, o relativa eguaglianza dei lati ne' soli rettilinei compresi da tre lati; così in questi l'assoluta, o relativa eguaglianza delle inclinazioni si vedrà seguire l'assoluta, o relativa eguaglianza degli angoli piani, ne' soli angoli solidi compresi da tre angoli piani.

COROLLARIO V.

§. 354. Per l'eguaglianza dunque di due angoli solidi è necessario, che sian terminati da egual numero di angoli piani, che sian questi angoli relativament' eguali, e che siano in fine i piani degli angoli relativamente eguali egualmente inclinati. Nel che anche veggonsi co' rettilinei cospirare.

COROLLARIO VI.

§. 355. Può dunque l' ineguaglianza di due angoli solidi desumersi da altrettanti principj, o dall' esser cioè, terminati da inegual numero di angoli piani, o dal non esser tutti questi relativamente eguali; o dal non esser tutte le inclinazioni di uno relativament' eguali a tutte quelle inclinazioni dell' altro, che son tra piani relativament' eguali.

DE-

DEFINIZIONE IV.

§. 356. Si diranno in due angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali inclinazioni, o lati omologhi quelle, o quelli, che tramezzano angoli relativament' eguali.

COROLLARIO I.

§. 357. Potendo un angolo solido comprendersi o da angoli piani tutti eguali, nel qual caso sarà detto equiangolo, o da angoli pian' in parte eguali, nel qual caso sarà detto misto, o in fine da angoli tutt'ineguali, nel qual caso sarà detto scaleno; perciò in due angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali ogn' inclinazione di uno potrà dirsi omologa con un' alrra sola dell' altro, se siano tali angoli Solidi scaleni; potrà dirsi omologa con varie dell' altro, se siano misti, e potrà in fine dirsi omologa con ciascuna dell' altro, se siano equiangoli.

CO-

COROLLARIO II.

§. 358. Poichè però un' angolo ſolido, ſe ſia compreſo da più di tre angoli piani, quando anche queſti fuſſero eguali può avere (come ſi vedrà) inegual' inclinazioni de' piani; quindi, quantunque baſtaſſe per l' ineguaglianza di due angoli ſolidi terminati da egual numero di angoli piani, che una ſola inclinazione di uno ſconvenga coll' omologa inclinazione dell' altro; non potremo eſſer mai ſicuri di sì fatta ſconvenienza, ſe quell' una inclinazione del primo angolo non ſi trovi ſconvenire con tutte le omologhe inclinazioni dell' altro; ed eſſendo perciò quegli angoli Solidi Equiangòli, dovrà, per trovarſi ineguali, quell' una inclinazione del primo ſconvenir con tutte le inclinazioni del ſecondo (§ pr).

AVVERTIMENTO.

§. 359. Così ſe due rettilinei ABCDE FGHIK(*fig.*22)ſian terminati da più di tre

lati assolutament' e relativament' eguali, e sia l' angolo A del primo ineguale cogli angoli G, H, I, K, del secondo; non è sicura la di loro ineguaglianza, se non quando, si scorga ineguale anche con F.

DEFINIZIONE V.

§. 360. Negli angoli Solidi compresi da più di tre angoli piani, nei quali perciò convengono più di tre lati (§ 351); potranno distinguersi i lati contigui, cioè, quelli, che appartengono allo stesso suo angolo piano, ed i non contigui, quelli, cioè, che appartengono a diversi angoli piani, e siccome posson ben dirsi esterni quegli angoli, che comprendono i lati contigui, come quelli, che sono negli esterni piani del Solido; così posson ben dirsi interni quelli, che son compresi dai lati non contigui, come quelli, che sono negl' interni piani del Solido.

AVVERTIMENTO.

§. 361. Non possono non comprendersi angoli anche ne' lati non contigui, giacchè ove questo si nieghi, e si dicano perciò quelli lati in diretto, si diranno in diretto anche i piani terminati da quelli, cioè, che comprendono l'angolo Solido, locchè ripugna (§ 349).

DEFINIZIONE VI.

§. 362. In ogni angolo Solido compreso da più di tre angoli piani ogni suo angolo interno si dirà sottoposto a quella coppia di aderenti suoi angoli esterni, che tagliarebbe dall' angolo solido il piano di quell' angolo interno; così nell' angolo A (fig. 23) l' interno suo angolo CAF sì dice sottoposto agli aderenti esterni suoi angoli BAC BAF; e così negli angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, si diranno omologhi quegli angol' interni, che son sottoposti ad esterni relativamente eguali.

CO-

COROLLARIO I.

§. 363. Se gli angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, siano scaleni, ogni angolo interno del primo angolo solido non avrà, che uno interno omologo nel secondo; se sian misti ne avrà varj; e se siano in fine equiangoli l'avrà tutti (§ 357).

COROLLARIO II.

§. 364. Ogni angolo interno è compreso dai lati di quegli aderenti angoli esterni, ai quali è sottoposto; e perciò è ad entrambi aderente.

LEMMA I.

§. 365. *In ogni angolo solido compreso da più di tre angoli piani ogni coppia di aderenti suoi angoli esterni col sottopostogli interno comprende un angolo solido.*

DI

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 23. Nel solido angolo A compreso da cinque angoli piani sia l'interno angolo CAF sottoposto agli aderenti suoi angoli esterni BAC BAF.

Essendo l'angolo CAF aderente ai due BAC BAF (§ pr) che sono aderenti per ipotesi; saranno tutti tre annularmente aderenti (§ 347); ma essendo i due BAC BAF inclinatamente aderenti (§ 349) così è con ciascuno di questi anche CAF; altrimente sarebbero nello stesso piano i lati AB AC AF, e così gli angoli BAC BAF; son dunque tutti tre non solo annularmente, ma anche inclinatamente aderenti, e perciò comprendono quell'angolo solido, che D. D. (§351).

COROLLARIO I.

§. 366. Un angolo solido dunque compreso da più di tre angoli piani potrà dai piani de' suoi angol' interni restar diviso in tanti angoli di tre, quanti sono i suoi piani meno due, cioè, in due s'è

com-

compreſo da quattro, in tre ſe da cinque, e così in appreſſo; giacchè per gli ſoli membri eſtremi di sì fatta diviſione ci biſognano due angoli eſterni, ed uno interno, per gli membri medii l'oppoſto.

COROLLARIO II.

§. 367. E pel contrario ogni angolo ſolido compreſo da più di tre piani potrà dirſi nato dall'accoppiamento di tanti angoli di tre, in quanti è lo ſteſſo diviſibile, nella diviſata forma.

AVVERTIMENTO.

§. 368. Ecco perchè ſarà quindi detto ſemplice ogni angolo ſolido compreſo da tre piani, compoſto ogni altro compreſo da più.

COROLLARIO III.

§. 369. Gli angoli dunque interni di un angolo compoſto non ſono, che eſterni angoli de' ſuoi angoli ſemplici.

LEM-

LEMMA II.

Fig. 24. §. 370. *Degli angoli piani ABC CBD inclinatamente aderenti in CB, e relativamente eguali agli angoli EFG GFH inclinatamente aderenti in FG, saranno i piani egualmente inclinati, che i piani di questi, se l'angolo, che comprendono i lati BA BD dei primi eguagli l'angolo compreso dai lati FE FH dei secondi.*

DIMOSTRAZIONE.

Dai punti C G presi nei lati comuni equidistanti dal vortice rispettivo s' inalzino ne'rispettivi piani degli angoli quattro perpendiculari, CA CD GE GH; queste misureranno co' di loro angoli le inclinazioni di quei piani, e comprenderanno perciò colle rette AD EH due triangoli.

I triangoli ABC EFG ànno gli angoli in B F eguali per ipotesi, e gli angoli in C G eguali per costruzione; son dunque equiangoli, e perciò simili; ma sono in essi eguali per la stessa costruzione

ne gli omologhi lati BC FG; ſon dunque in eſſi eguali anche gli altri omologhi lati, cioè AB=EF, AC=EG. Nella ſteſſa maniera ſi moſtra DB=HF, e DC=HG; nei triangoli dunque ABD EFH vi ſono i lati AB BD relativamente eguali ai lati EF FH, e gli angoli in eſſi compreſi eguali per ipoteſi; eguali ne ſon dunque le baſi; e perciò ſaranno i triangoli ACD EGH relativament' equilateri; eguali ſon dunque in eſſi gli angol' in C G, cioè le inclinazioni de' piani de' quattro angoli ABC CBD EFG GFH. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 371. Gli angoli dunque ſemplici compreſi da angoli piani relativament' eguali avranno anche relativament' eguali tutte le omologhe inclinazioni de' riſpettivi piani; e perciò ſono eguali (§354).

COROLLARIO II.

§. 372. Se un angolo ſemplice ſia equiangolo avrà anch' eguali le inclina-

 zioni

zioni de' ſuoi piani ; e perciò, ſe due ſemplici ſiano relativamente, ed aſſolutament'equiangoli, avranno relativamente, ed aſſolutament' eguali le inclinazioni dei piani.

AVVERTIMENTO I.

§. 373. Siccome negli angoli ſemplici all' eguaglianza degli angoli eſterni corriſponde ſempre l'eguaglianza delle omologhe inclinazioni dei piani, così lo ſteſſo non ſempre à luogo negli angoli compoſti, come appreſſo vedraſſi; ecco perchè ſi ſian quelli da queſti diſtinti.

AVVERTIMENTO II.

§. 374. Siccome dando a quelle coppie di angoli relativament' eguali anche i terzi angoli eguali ſi ſon vedute eguali le inclinazioni di quei piani; così dando alle ſteſſe eguali le inclinazioni, ſi vedranno dalla ſteſſa teoria de' triangolí, i terzi angoli eguali.

AV-

AVVERTIMENTO III.

§. 375. E ficcome dal dare a quegli angoli anche i terzi angoli eguali fi fon vedute quelle inclinazioni eguali; così dando agli fteffi ineguali i terzi angoli, fi vedranno dalla fteffa teoria le inclinazioni ineguali; e maggiore fi troverà in quelli, che àn maggiore il terzo angolo; ed invertendo dando ad effi ineguali inclinazioni, ineguali, e colla fteffa corrifpondenza fi troveranno i terzi angoli.

PROPOSIZIONE L.

§. 376. *Gli eguali angoli compofti àn relativament' eguali gli omologhi angol' interni.*

DIMOSTRAZIONE.

Degli eguali compofti angoli A F fiano i due angoli BAC CAD del primo relativament' eguali ai due GFH HFI del fecondo, farà l'interno angolo BAD del primo omologo coll' interno angolo GFI del fecondo (§ 362). Fig. 25.

Essendo i solidi angoli A F per ipotesi eguali, eguali avranno le omologhe inclinazioni dei piani (§ 354), e perciò sarà l'inclinazione de' piani BAC CAD eguale all'inclinazione dei piani GFH HFI; l'angolo dunque BAD eguaglia l'angolo GFI (§ 374) suo omologo; ma va lo stesso degli altri; gli eguali dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 377. Gli eguali angoli composti son divisibili in egual numero di angoli semplici relativament' eguali (§ 365).

COROLLARIO II.

§. 378. E per l'opposto può dirsi, che nascan gli eguali angoli composti dall'accoppiamento di egual numero di angoli semplici relativament' eguali, e similmente combinati.

PRO-

PROPOSIZIONE II.

§. 379. *Due angoli composti sono eguali se sian terminati da egual numero di angoli esterni relativamente eguali, e se abbiano relativamente eguali gli omologhi angol' interni.*

DIMOSTRAZIONE.

Degli angoli composti A F della divisata natura siano i piani angoli BAC CAD del primo relativamente eguali agli angoli GFH HFI del secondo; sarà per l' ipotesi l' angolo interno BAD ai primi sottoposto eguale all'omologo interno GFI sottoposto ai secondi; e sarà perciò l'inclinazione de' piani dei primi eguale all' omologa inclinazione de' secondi (§ 370); ma nella stessa maniera si mostra ogni altra inclinazione de' successivi piani del primo angolo eguale ad ogni altra omologa inclinazione dei piani del secondo; gli angoli dunque A F non solo son terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali; ma ànno anche Fig. 25.

relativamente eguali le omologhe inclinazioni dei piani; e perciò son eguali (§ 354) C. D. D.

PROPOSIZIONE III.

§. 380. *Sono ineguali quegli angoli composti, ne' quali quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, sia un angolo interno di uno ineguale cogl' interni omologhi dell' altro.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.25. Degli angoli composti A F della divisata natura sia l' interno angolo BAD del primo ineguale coll'omologo interno GFI del secondo; saranno gli esterni aderenti angoli BAC CAD al primo interno soprapposti eguali relativamente agli esterni aderenti angoli GFH HFI soprapposti al secondo (§ 362) e perciò sarà l' inclinazione dei primi esterni ineguale coll' omologa (§ 356) inclinazione dei secondi (§ 375); ma nella stessa maniera si mostra la stessa inclinazione di quei piani del primo angolo ineguale

con

con ogni altra (se ci fusse (§ 357) omologa inclinazione de' piani del secondo; e sono ineguali quegli angoli Solidi, nei quali, quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, si trovi una inclinazione nei piani di uno ineguale con tutte le omologhe inclinazioni de' piani dell' altro (§ 358); saran dunque ineguali quegli angoli composti, nei quali, quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali sia un angolo interno di uno ineguale &c. C. D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 381. Che ci siano degli angoli composti della divisata natura lo mostreranno a suo luogo i Solidi Innominati.

AVVERTIMENTO II.

§. 382. Due piani inclinatamente aderenti si diranno accoppiarsi con altri due anche inclinatamente aderenti, se se ne facciano combaciar due piani, e le comun' intersezioni di essi.

COROLLARIO I.

§. 383. I quattro piani così accoppiati si riducono a tre, de' quali il medio, quello cioè, che rappresenta i due combaciati, si dirà interno, e gli estremi, si diranno esterni.

COROLLARIO II.

§. 384. In ogni sì fatto accoppiamento di piani avran luogo due inclinazioni, quelle cioè, che ànno i piani esterni coll'interno.

LEMMA.

§. 385. *Se le due inclinazioni di uno accoppiamento di piani siano relativamente eguali alle due inclinazioni di altro accoppiamento, saranno tra se i piani esterni del primo accoppiamento egualmente inclinati, che i piani esterni dell'altro.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I piani ABC ABD ABE rappresentino il primo accoppiamento, e rappresenti AB le combaciate comun' intersezioni; ed i piani FGH FGI FGK rappresentino il secondo, ed FG le altre combaciate intersezioni; e sia l' inclinazione di ABC ABD eguale all' inclinazione di FGH FGI; e quella di ABD ABE eguale a quella di FGI FGK; si prendano nelle comun' intersezioni ad arbitrio i punti B G, e da questi s'inalzino tante perpendiculari ne' rispettivi piani BC BD BE GH GI GK. Fig. 26

Per la costruzione gli angoli CBE HGK misurano le inclinazioni de' piani esterni, e gli angoli DBC DBE IGH IGK le inclinazioni, che ànno gli esterni col rispettivo interno; sarà dunque per l' ipotesi la somma de' primi due eguale alla somma de' secondi; ma essendosi nella costruzione le rette BC BD BE erette perpendiculari dallo stesso punto B alla stessa AB; e le rette GH GI GK perpendiculari dallo stesso punto G

alla

alla stessa FG, sono BC BD BE nello stesso piano, ed in altro istesso piano le rette GH GI GK; e perciò l'angolo CBE eguaglia i due DBC DBE, e l'angolo HGK gli altri due IGH IGK; dunque l'angolo CBE eguaglia l'angolo HGK. C. D. D.

PROPOSIZIONE IV.

§. 386. *Gli angoli composti da soli quattro angoli piani relativamente eguali sono eguali, se un angolo interno di uno eguagli un intern' omologo dell' altro.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 25. Gli angoli A F siano della disegnata natura, e siano gli angoli BAD GFI i di loro interni omologhi eguali; sarà da ciò l'angolo solido ABCD eguale all' angolo FGHI, e l'angolo ABED eguale all' angolo FGKI (§ 371), e saran perciò relativamente eguali le omologhe inclinazioni de' piani e della prima coppia, e della seconda; saranno dunque negl' interi angoli A F non solo le omologhe

loghe inclinazioni de' piani soprapposti agli eguali omologh' interni BAD CFI (§ 371) eguali, ma anche le altre, come di esterni piani di tali accoppiamenti (§ pr); ma son anche questi angoli A F per l' ipotesi terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali; son dunque eguali. C. D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 387. Così del pari si mostra, che gli angoli A G (*fig.* 23) composti da cinque angoli relativamente eguali siano eguali, se i due interni CAF, DAF del primo siano relativamente eguali ai due omologh' interni IGM KGM del secondo; perchè restando così gl' interi angoli A G divisi dai piani di quegli angoli' interni in angoli semplici relativamente eguali, si mostrano in essi, come nella prec. eguali tutte le altre omologhe inclinazioni dei piani; sicchè potrà dirsi generalmente, che siano eguali gli angoli composti, se sian divisibili in egual numero di angoli semplici relativamente eguali; e perciò, se oltre d' esser compresi

presi da egual numero di angoli piani relativamente eguali, abbiano un angolo interno eguale ad un interno omologo, se sian compresi da soli quattro angoli piani, due, se sian compresi da cinque; tre, se da sei, e così in appresso.

AVVERTIMENTO II.

§. 388. Di due rettilinei, che possono combaciar con uno aspetto, e non con l' altro, si diranno i primi aspetti corrispondenti, e non corrispondent' i secondi.

LEMMA.

§. 389. *I triangoli relativamente equilateri, ma non assolutamente ànno gli aspetti non corrispondenti, ed ànno gli altri corrispondenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 27. I. Siano i triangoli ABC DEF relativamente equilateri, e non assolutamente, e sia perciò AC = DF, AB = FE, e BC = ED; sarà l' angolo A eguale all'

all' angolo F, B = E, e C = D; ma ciascuno di questi triangoli, per l' ipotesi non è assolutamente equilatere; non sarà perciò neppur assolutamente equiangolo; sia dunque nel triangolo ABC l' angolo A maggiore dell' angolo C, sarà dello stesso maggiore anche l' angolo F a quello eguale; se dunque si sopraponga il triangolo DEF sul triangolo ABC in modo, che vada D sopra A il lato DF su l' eguale AC, caderà F sopra C; ma essendo l' angolo F maggiore dell' angolo C, caderà FE fuori del triangolo ABC; i triangoli dunque relativamente equilateri, ma non assolutamente ànno gli aspetti non corrispondenti.

II. Se però uno di sì fatti triangoli si rivolga, cosicchè si faccia incontrar l'altro con l' altro suo aspetto, allora incontrandosi non solo un lato, ma anche gli angoli eguali combaceranno; e perciò &c. C. D. D.

AV-

AVVERTIMENTO I.

§. 390. Gli stessi doppj aspetti corrispondenti, e non corrispondenti si osservano in tutt' i rettilinei relativamente equilateri, ed equiangoli, ma non assolutamente; giacchè anche in ognuno di questi si mostra, che l' ineguaglianza degli angoli segua quella de' lati.

COROLLARIO.

§. 391. Di tutt' i rettilinei assolutamente, e relativamente equilateri, ed equiangoli sono gli aspetti tutti corrispondenti.

PROPOSIZIONE V.

§. 392. *Ci son degli angoli solidi eguali, che non possono combaciare.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 27. Due triangoli relativamente equilateri, e non assolutamente esibiscano gli aspetti ABC DEF non corrispondenti, e sia

e sia AC ≐ DF, AB ≐ FE, e BC ≐ ED.

Essendo sì fatti triangoli relativamente equilateri, saran simili, ed eguali, e saran perciò iscrittibili in cerchj eguali; trovati dunque i centri di sì fatti cerchj G H, ed erette da essi l'eguali GI HK normali ai rispettivi piani di essi, ed unito il punto I con i punti ABC, e 'l punto K con i punti DEF; si avranno sei lati eguali AI BI CI DK EK FK, giacchè il quadrato d' ognuno di essi eguaglia i quadrati di una dell' eguali normali, e di uno degli eguali ragi; sarà dunque il triangolo AIC simil' ed eguale al triangolo DKF, ed avran questi eguali gli angoli in I K; sarà il triangolo AIB simil' ed eguale al triangolo EKF, ed avran questi eguali gli angol' in I K; e sarà finalmente il triangolo BIC simil' ed eguale al triangolo EKD, ed avran questi eguali gli angol' in I K; si avranno dunque in I K due angoli semplici compresi da angoli piani relativamente eguali, e perciò eguali (§ 371).

Si supponga soprapporsi l' angolo K su

ſu l' angolo I in modo, che vada K ſopra I il lato KD ſopra IA e 'l piano KDF ſul piano IAC, caderà anche KF ſopra IC per l'eguaglianza di quegli angoli, ed i punti D F caderanno ſopra i punti A C per l' eguaglianza de' lati; Or ſe ſi dica, che anche nel reſto combacino quegli angoli ſolidi K I, e che perciò anche KE vada ſopra IB, caderebbe per l'eguaglianza de' lati E ſopra B, e così combacerebbe il triangolo DEF col triangolo ABC; ma queſto è contro l' ipoteſi; è falſo dunque, che quei ſemplici, ed eguali angoli I K poſſino combaciare; e ſarà perciò vero ciocchè D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 393. Siccome dall' incorriſpondenza de' triangoli s' è moſtrata l' incombaciabilità degli angoli ſemplici eguali ſu di eſſi nella diſegnata forma edificati, così dall' incorriſpondenza di qualunque altra coppia di rettilinei relativamente equilateri, ed equiangoli, ma non aſſolutamente (§ 390) ſi moſtra l' incomba-

ba-

baciabilità degli eguali angoli composti su di essi nella stessa forma costrutti; giacchè questi dall'aver simili, ed eguali rettilinei ad essi sottoposti si troveranno non solo, come quelli, compresi da egual numero di angoli piani relativamente eguali, ma tali bensì, che abbiano gl' interni omologhi angoli eguali, come può facilmente osservarsi (§ 379).

AVVERTIMENTO II.

§. 394. Lo stesso però doppio aspetto corrispondente, e non corrispondente osservato ne' piani relativamente, e non assolutamente equilateri, ed equiangoli (§ 390), à luogo negli angoli solidi su di essi nella disegnata forma costrutti; se cioè uno di essi si supponga rivolgersi in modo, che occulti gli esterni aspetti de' suoi piani, manifesti gl' interni, si troverà, che debba coll' altro combaciare; giacchè l' incombaciabilità de' disegnati angoli à luogo, non perchè le interne inclinazioni di uno sian dissimili dalle omologhe inclinazioni dell' altro, che già sonosi osservate eguali; ma perchè

chè son queste in uno disposte in ordine inverso a quello, che son disposte nell' altro; ecco perchè non ostante l' incombaciabilità siano eguali; ecco perchè invertendosene uno debbano anche combaciare.

AVVERTIMENTO III.

§. 395. Dallo stesso tenore della precedente dimostrazione si osserva, che la stessa incombaciabilità, e doppio aspetto osservato ne' disegnati angoli solidi, abbia luogo in quei solidi stessi simili, ed eguali, che sono edificati su gli aspetti incorrispondenti di piani simili, ed eguali; nè per questo può dubitarsi dell' eguaglianza di solidi sì fatti, come quelli, ne' quali, a somiglianza di quegli angoli, conviene l' eguaglianza delle tre dimensioni fattrici della solidità; trovandosi cioè in quei solidi eguali le basi, e le altezze.

AVVERTIMENTO IV.

§. 396. Siccome si osservò (§ 391) ne' piani, che quelli, che siano assoluta-

tamente, e relativamente equilateri, ed equiangoli, avendo sempre gli angoli similmente disposti, perchè tutti eguali, abbiano tutti gli aspetti corrispondenti: così ora si osserva, che negli eguali angoli solidi, de' quali siano assolutamente, e relativamente eguali non solo gli esterni angoli, ma anche le inclinazioni de' piani di essi, o siano gl' interni angoli de' medesimi (§ 376), siano parimente gli aspetti tutti corrispondenti, cioè sempre combaciabili.

AVVERTIMENTO V.

§. 397. Si son veduti degli eguali angoli solid' incombaciabili, i Solidi Innominati ce ne mostreranno degli altri ineguali, quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali; e sebbene angoli sì fatti si rinvengano in solidi dissimili, e la natura de' solidi simili ci persuada, che tali angol' in essi non possano aver luogo; pure per procedere, come in questa scienza si deve, converrà in questi a seconda della premessa teoria dimostrarlo, e

questo premetterlo a Solid' Innominati, che àn di tanto bisogno, per ciocchè riguarda i Solidi Regolari, dai quali provvengono.

LEMMA.

§. 398. *Negli angoli Solidi Ottaedrali son gli angol' interni di quadrato; negl' Icosaedrici di pentagono regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Figure solide. I, e II. Essendo gli angoli d'ogni interno rettilineo di un Solido negli angoli stessi del Solido; e negli Ottaedri, ed Icosaedri, restando in quelli compresi dai lati stessi del solido, ma non da quelli, che appartengono allo stesso angolo degli esterni piani di essi (§ 23); saranno negli Ottaedri, ed Icosaedri gli angoli degl' interni di lor rettilinei gli angol' interni de' solidi angoli di essi (§ 360); ma son quadrati gl' interni rettilinei dell' Ottaedro (§ 86) pentagoni quelli dell' Icosaedro (§ 267); son dunque negli angoli solidi Ottaedrali gli angol' interni di quadrato; negl' Icosaedrici di pentagono Regolare. C. D. D.

AV-

AVVERTIMENTO.

§. 399. Può anche lo stesso mostrarsi per la prima parte dal nascer l'Ottaedro dall' intérsegarsi i suoi quadrati per le diagonali (§ 73), e per la seconda dal comprender nell' Icosaedro i lati de' suoi triangoli aderenti angoli di pentagoni regolari (§ 271).

PROPOSIZIONE V.

§. 400. *Gli angoli solidi in ogni specie di Solidi Regolari son tutti assolutamente, e relativament' eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I, e II. Delle Piramidi, de' Cubi, de' Dodecaedri son tutti i solidi angoli semplici, e terminati in ciascuna specie di essi da angoli non solo relativamente, ma anche assolutamente eguali; son dunque nelle Piramidi, ne' Cubi, ne' Dodecaedri gli angoli solidi assolutamente, e relativamente eguali;

ma i solidi angoli degli Ottaedri son tutti compresi da quattro angoli di triangoli equilateri, e retti sono gl' interni angoli di essi (§ pr); i solidi angoli degl' Icosaedri son tutti compresi da cinque angoli di triangoli equilateri, e di pentagoni regolari son gl' interni angoli di essi; son dunque anche degli Ottaedri, ed Icosaedri gli angoli solidi assolutamente, e relativamente eguali (§ 379); e perciò &c. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 401. Ne' Solidi Regolari della stessa specie, siccome sono regolari simili, ed eguali gli esterni, ed interni piani, così sono regolari, ed eguali gli esterni, ed interni angoli de' solidi angoli di essi; dal che segue di vantaggio 1.°, che siccome gli eguali angoli solidi compresi da angoli sol relativamente eguali possono combaciare in una sola posizione, solo cioè, facendo corrispondere i piani di uno agli eguali piani dell' altro; ed i compresi da angoli piani, anche assolutamente eguali, ma che abbiano angoli

li interni sol relativamente eguali, quali si vedran taluni angoli de' Solidi Innominati, possono combaciare per due posizioni; così gli angoli solidi d' ogni specie di Solidi Regolari combacino per tutte le possibili posizioni, cioè qualunque piano dell' uno sia soprapposto a qualunque piano dell' altro; 2.° che siano i piani in ogni specie de' Solidi Regolari assolutamente, e relativamente egualmente inclinati ne' piani aderenti, giacchè i piani, che combaciano sono egualmente inclinati. Nel che vedesi in ogni specie de' Solidi Regolari compita l' uniformità costitutiva della Regolarità.

AVVERTIMENTO I.

§. 402. Basta per l'eguaglianza di due angoli solidi, che sian compresi da egual numero di angoli piani, relativamente eguali, e che siano relativamente eguali le omologhe inclinazioni dei piani (§ 354); ma questo non basta punto per la Uniformità de' medesimi; vuol questa di vantaggio, che ne siano gli angoli piani, e le inclinazioni di essi,

 anche

anche assolutamente eguali; Dal che essendosi l'uno, e l'altro rinvenuto negli angoli de' Solidi Regolari di ogni specie, potrà dirsi, che sian questi non solo assolutamente, e relativamente eguali, ma assolutamente, e relativamente uniformi. Negli angoli Solidi dunque l'eguaglianza esige l'uniformità relativa di tutto ciò, che concorre a costituire la quantità de' medesimi (§ 354); la Regolarità l'assoluta.

AVVERTIMENTO II.

§. 403. Ne' Solidi Simili si diranno omologhi quegli angoli solidi, che sono compresi da egual numero di angoli piani relativamente eguali.

COROLLARIO.

§. 404. Nelle piramidi Simili non triangolari i composti angoli verticali sono omologhi.

PROPOSIZIONE VII.

§.405. *Nelle piramidi simili sono eguali gli angoli omologhi.*

DIMOSTRAZIONE.

Nelle simili piramidi triangolari sono gli angoli omologhi non solo compresi da egual numero di angoli piani relativamente eguali (§ 403), ma semplici, e perciò eguali (§ 371).

Nelle altre piramidi tutte sono gli angoli solidi nelle basi egualmente semplici, e perciò ne son gli omologhi eguali (§ 371); ed essendo questi eguali, eguali son parimente le omologhe inclinazioni dei piani di essi (§ 354); e perciò le omologhe inclinazioni de' piani, che comprendono i rispettivi angoli verticali; ma questi, come omologhi (§ pr) son anche compresi da egual numero di angoli piani relativamente eguali; son dunque anche questi eguali, e perciò nelle piramidi simili sono eguali gli angoli omologhi. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 406. Dallo stesso tenore della prec. prop. apparisce 1.° che siano eguali due an-

angoli composti, compresi da egual numero di angoli piani relativamente eguali, se sian tali, che ne siano i sottoposti rettilinei piani simili, e questi compian con essi due piramidi simili. 2.° Che siano eguali gli angoli omologhi de' Prismi, e Parallelepipedi simili, perchè tutti semplici.

AVVERTIMENTO.

§.407. Per gli altri Solidi Simili fuori di queste Classi, ove abbiano omologhi angoli composti, l'eguaglianza di questi può ripetersi, o dal veder simili gl'interni rettilinei ad essi sottoposti, o dal vedere, che i piani convenuti in quegli angoli abbiano altrove terminati angoli omologhi semplici, e perciò eguali, e così eguali anche conoscere le inclinazioni de' piani di quegli omologhi composti; onde può generalmente dirsi, che de' Solidi simili siano eguali gli angoli omologhi.

PARTE

PARTE SECONDA.

De' Solidi Innominati.

DEFINIZIONE I.

§. 408. SE ſi accoppj una Piramide Regolare con un'altra di lato eguale, in modo, che ne combacino due piani, ſi avrà il Solido Primo Innominato.

COROLLARIO I.

§. 409. L'Innominato Primo è compreſo da ſei eguali triangoli equilateri (giacchè gli altri due reſtano nell'interno del ſolido combaciati) così combinati, che coſpirino alla formazione di cinque angoli ſolidi, due piramidali ſuperſtiti, gli oppoſti cioè ai combaciati piani, che ſaranno anche detti oppoſti, e tre che naſcono dall'accoppiamento degli angoli de' combaciati piani, che ſaran detti nuovi, ed è ciaſcuno de' primi compreſo da tre angoli di quei triangoli, ciaſcun de' ſecondi da quattro.

COROLLARIO II.

§. 410. In ogni angolo nuovo dell'Innominato Primo vi è un angolo interno, quello cioè de' combaciati piani, di triangolo equilatere.

DEFINIZIONE II.

§. 411. Se si accoppjno nella stessa forma due di quelle piramidi pentagone, che tagliano dall'Icosaedro i suoi pentagoni, facendone combaciar gli eguali pentagoni, si avrà il Solido Innominato Secondo.

COROLLARIO I.

§. 412. L'Innominato Secondo è compreso da dieci eguali triangoli equilateri, così combinati, che cospirino alla formazione di sette angoli solidi, due Icosaedrici superstiti, gli opposti cioè alle combaciate basi; onde saran anche detti opposti, e cinque, che nascono dall'accoppiamento degli angoli, che sono nelle combaciate basi, onde saran detti nuovi;

vi; ed è ciascuno de' primi compreso da cinque angoli di quei triangoli, ciascun de' secondi da quattro.

COROLLARIO II.

§. 413. In ogni angolo nuovo dell'Innominato secondo vi è un angolo interno, quello cioè delle combaciate basi, di pentagono regolare.

COROLLARIO III.

§. 414. I Solid'Innominati sono equilateri, perchè sol terminati da eguali triangoli equilateri.

AVVERTIMENTO.

§. 415. Quantunque non sempre l'accoppiamento di due piani simili, ed eguali di due solidi produca degli angoli solidi insorti dagli angoli alle basi dell'uno, e l'altro solido; giacchè ove si soprapponga un prisma, o una piramide troncata sul suo resto, invece di nascere gli angoli nuovi, si elidono gli uni gli altri

altri i vecchj; pure non può dubitarsi, che dal disegnato accoppiamento di solidi nascano, come si son dettagliati, gli angoli nuovi; imperciocchè e nelle prime, e nelle seconde piramidi sono i piani egualmente inclinati alle basi, giacchè le prime son regolari, e sono i piani di queste assolutamente, e relativamente egualmente inclinati (§ 401), e le seconde, essendo simili, ed eguali, ed avendo gli angoli verticali Icosaedrici, debbono, soprapposti questi angoli, combaciare qualunque piano verticale dell'una sia sopprapposto a qualunque piano verticale dell'altra (§ 401), ed i piani, che combaciano son egualmente inclinati; sicchè o ciascun piano insistente alla base dell' una deve incontrarsi in diretto con ciascun piano alla base dell'altra, o deve ciascun incontrar l'altro con eguale inclinazione; ma non può il primo asserirsi, dandosi così delle piramidi, che abbiano i piani tutti alle basi normali; e così dandosi dallo stesso punto calate in un piano più normali, i lati cioè di quelle piramidi; come intersezioni di quei piani normali; converrà dunque confessare il secondo, ed

ed ammettere gl' insorti angoli nuovi.

DEFINIZIONE III.

§. 416. Si diranno assi de' Solid' Innominati le rette, che uniscono in essi gli angoli opposti.

LEMMA.

§.417. *Gli estremi de' lati convenuti in ogni angolo nuovo del Primo Innominato non sono nello stesso piano.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè le rette, che l'uniscono comprendono due de' suoi inclinati (§ 415) triangoli. C. D. D. Fig. sol.

LEMMA II.

§. 418. *Se dalla retta, che incontra normalmente un piano si faccia oltrepassarlo, questa resterà all' altro aspetto del piano anche allo stesso normale.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 18. Giacchè gli angoli, che fa la sua produzione BC nelle rette DE FG sono egualmente retti, che quelli, che fa nelle stesse la normale AB; perchè a quelli verticalmente opposti. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 419. Se dunque dallo stesso punto di un piano si eriggano due normali una verso l' aspetto superiore, l' altra verso l' inferiore dello stesso, queste saranno in diretto.

LEMMA III.

§. 420. *Se si facciano combaciar due simili, ed eguali rettilinei regolari, combaceranno anche i centri di essi.*

DIMOSTRAZIONE.

Altrimente dallo stesso punto medio de' combaciati lati potrebbero a quel lato inalzarsi due perpendiculari, come fa-

sarebbero le rette, che l'unirebbero con i distinti centri (§ 11). C. D. D.

LEMMA IV.

§. 421. *L'asse de' Solid' Innominati passa pel centro delle combaciate basi, e resta dallo stesso diviso* bifariam.

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè le rette, che uniscono gli angoli opposti con i combaciati centri (§ pr), dovendo restare allo stesso piano normali (§ 34 e 276) sono in diretto (§ 419), e sono eguali (§ 34 e 268). C. D. D. Fig. sol.

LEMMA V.

§. 422. *Nell'Innominato Secondo i lati opposti agli angoli convenuti nello stesso suo angolo nuovo comprendono due angoli opposti di pentagono regolare, e la retta, che unisce gli altri due è la corda dell'uno, e l'altro pentagono.* Fig. sol. e Fig. 8.

DIMOSTRAZIONE.

Comprendendo de' triangoli aderenti Icosaedrici tanto i lati AB BD, quanto i lati AC CD angoli di pentagoni regolari (§ 271) sarà vera la prima, e la seconda parte. C. D. D.

LEMMA VI.

§. 423. *Nel pentagono regolare il centro è fuori delle sue corde.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 11. Giacchè la corda KG, ed ogni altra è inclinata al lato GH, ed ad ogni altro corrispondente, ed il centro trovasi in KO allo stesso perpendiculare (§ 11). C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 424. I piani degli angoli pentagonali, che son sottoposti ad ogni angolo nuovo del Secondo Innominato non sono in diretto, ma s'intersegano nella corda co-

comune, giacchè resta fuori di questa (§ pr) l'asse, che à in quei piani medesim' i suoi estremi.

COROLLARIO II.

§. 425. E perciò gli estremi de' lati convenuti in ogni angolo nuovo dell'Innominato secondo non sono nel medesimo piano.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 426. *I Solidi Innominati non sono iscrittibili nella Sfera.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo questi equilateri (§ 414); se fusser anche nella Sfera iscrittibili avrebbero nello stesso piano gli estremi de'lati convenuti in ogni angolo (§ 83); ma non l'ànno (§§ 417 e pr); non son dunque nella Sfera iscrittibili. C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 427. *Gli angoli nuovi de' Solidi Primi Innominati son tutti assolutamente, e relativament' eguali, e così sono tra se anche gli angoli nuovi de' Solidi Secondi.*

DIMOSTRAZIONE.

Ogni angolo nuovo dei Primi è compreso da quattro angoli di triangoli equilateri (§ 409), ed à un angolo interno anche di triangolo equilatere (§ 410); ed ogni angolo nuovo de' Secondi è compreso da quattro angoli di triangoli equilateri (§ 412), ed à un angolo interno di pentagono regolare (§ 413); sarà dunque vera la prima, e la seconda parte pel (§ 386). C. D. D.

PROPOSIZIONE X.

§. 428. *Ci son degli angoli solid' ineguali, quantunque compresi da egual numero di angoli piani relativament' eguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

A B C

Disegni A un angolo nuovo dell'Innominato Primo, B un angolo nuovo dell'Innominato Secondo C, un angolo solido Ottaedrale.

L'angolo A è compreso da quattro angoli di triangoli equilateri, ed à un angolo interno anche di triangolo equilatere (§ 410), l'angolo B è compreso da quattro angoli di triangoli equilateri, ed à un angolo interno di pentagono regolare (§ 413), l'angolo C finalmente è del pari compreso da quattro angoli di triangoli equilateri, ed à entrambi gl'interni retti (§ 398); ma son ineguali quegli angoli Solidi, ne' quali, quantunque compresi da egual numero di angoli piani relativament' eguali, sia un angolo interno in uno ineguale cogl' interni omologhi dell'altro (§ 380); dunque nè l'angolo A, nè l'angolo B eguaglia l'angolo C; e perciò ci son degli angoli Solid' ineguali, quantunque com-

 presi

presi da egual numero di angoli piani relativamente eguali. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 429. Dall'aver conosciuto nell'angolo A un angolo interno di triangolo equilatere, e nell'angolo B un interno di pentagono regolare non segue sicuramente, che sian gli angoli A B ineguali; giacchè essendo questi equiangoli, ed essendo così ogn'interno dell'angolo A omologo con ciascun interno dell'angolo B (§ 363), deve l'interno di A sconvenire con tutti gl'interni di B, per esser ineguali; questo si dimostrerà nella seguente proposizione, per conoscere anche più estesamente la già dimostrata verità.

LEMMA.

Fig.29. §.430. *Il lato del Pentagono Regolare è minor del doppio di quello del Decagono Regolare iscrittibile allo stesso cerchio.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

L' arco CND tagliato dal lato CD dell' iscritto pentagono regolare si divida *bifariam* in N, e si unischi CN DN.

Essendosi nella costruzione l'arco CND diviso *bifariam* in N; saranno i lati CN DN non solo eguali, ma lati del Decagono iscrittibile allo stesso cerchio; ma nel triangolo CND il lato CD è minor de' due CN DN; dunque il lato del pentagono è minor del doppio del lato del Decagono nello stesso cerchio iscrittibile. C. D. D.

PROPOSIZIONE XI.

§. 431. *L' angolo nuovo del Solido Primo, e l' angolo nuovo del Solido Secondo sono ineguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Se fussero eguali sarebbe l'interno ignoto del Primo di pentagono Regolare, e l'interno ignoto del Secondo di triango- Figure solide.

lo equilatere (§ 376) ; e così sarebbe nel Solido Secondo l'asse eguale al suo lato ; e sarebbe perciò in esso il quadrato del lato eguale ai quadrati uno fatto dal suo semiasse (§ 421) ; e perciò dal suo semilato ; e l'altro dal ragio di circoscrizione del pentagono delle combaciate sue basi (§ 9) ; ma questo è lo stesso, che il quadrato del lato dell'esagono nello stesso cerchio iscrittibile, che quel pentagono ; sarebbe dunque il quadrato del lato di questo Solido, e perciò il quadrato del lato del suo pentagono (§ 414) eguale ai quadrati fatti uno dal semilato, l'altro dal lato dell'esagono nello stesso cerchio iscrittibile ; ma il quadrato del lato del pentagono eguaglia quelli dell'esagono, e del Decagono nello stesso cerchio iscrittibili ; sarebbe dunque il semilato del pentagono regolare lo stesso, che il lato del Decagono regolare nello stesso cerchio iscrittibile ; ma questo ripugna (§ pr.) ; è falso dunque, che l'interno ignoto del Solido Secondo sia di triangolo equilatere ; e perciò l'interno di triangolo equilatere del Primo sconviene con ciascun interno del Secon-

do (§ 413); son dunque ineguali (§ 380). C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 432. Se dallo stesso tenore della precedente dimostrazione s'è veduto, che il semiasse del Solido Secondo eguagli il lato del Decagono nello stesso cerchio iscrittibile, che il suo pentagono, e s'è il lato del Pentagono minor del doppio di quello del Decagono nello stesso cerchio iscrittibile, sarà in questo Solido l'asse maggior del lato; e perciò sarà l'ignoto interno angolo de' suoi angoli nuovi maggiore dell'angolo di triangolo equilatere.

COROLLARIO II.

§. 433. Dagli angoli dunque di triangoli equilateri posson comprendersi non solo l'angolo Piramidale, l'Ottaedrale, l'Icosaedrico, ma anche gli angoli nuovi de' Solid' Innominati.

COROLLARIO III.

§. 434. Se gli stessi quattro angoli di triangoli equilateri, aderendo in modo da restar tutt'i piani tra se egualmente inclinati (§ 401), e così da comprendere interni angoli eguali (§ 376), e questi retti (§ 398) comprendono l'angolo Ottaedrale; ed aderendo in modo da comprendere un interno di triangolo equilatere, o di pentagono regolare comprendono l'angolo Nuovo del Primo, o del Secondo Innominato; è chiaro, che possano i lati di un angolo composto alterare le interne inclinazioni, senz'alterare le esterne; ed è perciò manifesto, il perchè nella misura degli angoli Solidi debb'aversi ragione non solo dell'esterne, ma anche dell'interne di loro inclinazioni.

AVVERTIMENTO I.

§. 435. Dal che niente osta a credere, che possano gli stessi quattro angoli veduti comprendere l'angolo Ottaedrale, ed i Nuovi, comprendere anche altre ignote

specie

ſpecie di angoli Solidi, alterando cioè, gl' interni loro angoli, e non gli eſterni diverſamente da quello, che nel formare i noti Nuovi ſi ſono alterati. Lo ſteſſo va detto, e con maggiore variabilità nella combinazione de' cinque angoli, che comprendono l'angolo Icoſaedrico.

COROLLARIO IV.

§. 436. Ove dunque doveſſe venirs' in cognizione del numero de' Solidi Regolari ſolo da quello de' diverſi angoli ſolidi, che poſſan comprenderſi dagli angoli di ſimili rettilinei regolari, ſi troverebbe molto maggior di quello, che realmente lo è.

AVVERTIMENTO II.

§. 437. Vediamo per qual altra ſtrada poſſiamo di queſta verità aſſicurarci. Tutte le altre note, ed ignote ſpecie di angoli Solidi, che poſſon naſcere da quattro, o cinque angoli di triangoli equilateri, oltre i noti angoli Ottaedrali, ed Icoſaedrici, debbono ammettere angol' interni

non

non uniformi; essendo questo necessario, per alterarsi le interne, e non le esterne inclinazioni di quegli angoli dalla uniformità, nella quale debbono essere ne' Solidi Regolari; e così di fatto, si osserva negli angoli nuovi de' Solid' Innominati; se dunque la Regolarità esclude la difformità, esclude questi altri angoli tutti; siccome cioè, quantunque sian moltissime le diverse specie de' rettilinei, che posson terminarsi dalle stesse quattro, o cinque rett' eguali, alterando cioè, variamente i di loro angoli; e pure non son più di due i rettilinei regolari, che posson da quelle comprendersi, il quadrato cioè, e 'l pentagono regolare; così quantunque sian forse anche moltissime le diverse specie di angoli Solidi, che possan comprendersi da quattro, o cinque angoli di triangoli equilateri, non son per tanto più di due i regolari, e perciò uniformi angoli Solidi, che posson da quelli terminarsi, l'Ottaedrale cioè, l'Icosaedrico; sarà dunque tanto sicuro, che non sian più di cinque i poliedri Regolari, quanto lo è, che sia dalla Regolarità inseparabile l'Uniformità. Ma dall'

ad-

addotta definizione del Solido Regolare non restano punto esclusi questi altri angoli tutti? Questi angoli non possono esistere, che in Solidi gli angoli de'quali sian terminati da inegual numero di angoli piani, come si vedono i Solid' Innominati; son dunque anche dalla definizione esclusi.

AVVERTIMENTO III.

§. 438. Siccome si vidde, che la norma, che nella stima della quantità di due angoli Solidi può desumersi dalla combaciabilità sia meno estesa del bisogno (§ 392); così ora s'è veduto, che lo sia più del dovere quella, che può dedursi dagli angoli, onde son terminati; è stato dunque giusto il ricorrerne ad altra, e dovrà questa credersi all'uopo proporzionata, s'è stata da tanto da scovrire il difetto di quella, e l'eccesso di questa.

CAPO



CAPO IX.

De' Solidi di Seconda Operazione.

§. 439. PEr far, che le date notizie de' Solidi Regolari potessero rapportarsi alle più importanti nozioni della Sfera è stato necessario, a Solidi Regolari aggiunger questi, che saran detti di Seconda Operazione.

DEFINIZIONE I.

§. 440. Se dall'Ottaedro, dal Cubo, dal Dodecaedro, dall'Icosaedro si taglino gli angoli Solidi con quei piani, che vedrem nat' in essi, unendo i punti medii di tutt' i lati contigui convenuti in ognun di quegli angoli, nascon quei Solidi, che saran detti di Seconda Operazione; riputandosi, come prima, quella produce in essi gli altri Solidi dalle corde.

AV-

AVVERTIMENTO I.

§. 441. Questa stessa operazione può bene aver luogo anche nella Piramide; ma poichè produce in essa un Solido del tutto Regolare, qual'è l'Ottaedro (§ 59); non dovea perciò questo numerarsi tra Solidi di seconda Operazione, nè la Piramide tra genitori di essi.

AVVERTIMENTO II.

§. 442. Il Solido Regolare in rapporto del Solido, che nasce in esso dalla disegnata operazione, sarà detto Solido corrispondente.

COROLLARIO I.

§. 443. Nascon sì fatti Solidi in quei Solidi Regolari, che àn lati opposti, giacchè la Sola Piramide, che non l'à, non vien numerata tra genitori di essi.

CO-

COROLLARIO II.

§.444. Lati di sì fatti Solidi saran le rette, che uniscono due punti medii de' lati appartenenti allo stess' angolo piano del Solido Corrispondente; restando del tutto astratti da ciascuno di essi i lati del Solido corrispondente.

COROLLARIO III.

§. 445. E poichè in ogni Solido Regolare eguali sono i lati, e perciò anche i semilati, eguali gli angoli piani, eguali perciò saranno i lati d' ogni Solido di Seconda Operazione; e perciò saranno tali Solidi equilateri.

COROLLARIO IV.

§. 446. Tagliandosi con tale operazione gli angoli Solidi dal Solido Regolare; resteranno nel Solido, che nasce in esso, tanti nuovi piani, che vedrem nati sotto gli angoli, tanti residui de' piani del Solido corrispondente; sarà perciò il numero

mero de' piani d'ogni Solido di Seconda Operazione eguale alla ſumma degli angoli ſolidi, e de' piani del Solido corriſpondente; quindi quattordici piani avrà il Solido, che naſce nell'Ottaedro, o nel Cubo; trentadue quello, che naſce nel Dodecaedro, od Icoſaedro.

COROLLARIO V.

§.447. E poichè di sì nati piani convengono gli angoli ne' punti medii de' lati del Solido corriſpondente; quindi ciaſcun Solido di Seconda Operazione avrà tanti angoli ſolidi, quanti lati à il Solido corriſpondente; e perciò il Solido, che naſce nell' Ottaedro, o nel Cubo ne avrà dodici; e trenta quello, che naſce nel Dodecaedro, od Icoſaedro.

DEFINIZIONE II.

§. 448. Angoli oppoſti in sì fatti Solidi ſi diran quelli, che pogiano i vertici ne' punti medii de' lati oppoſti del Solido corriſpondente.

DEFINIZIONE III.

§. 449. Assi le rette, che l'unìscono.

COROLLARIO I.

§. 450. Gli assi dunque di sì fatti solidi unìscono i punti medii de' lati opposti de' Solidi corrispondenti.

COROLLARIO II.

§. 451. E poichè ne' Solidi Regolari, che àn lati opposti, a due lati contigui son opposti altri due anche contigui; perciò ne' Solidi di Seconda operazione a due angoli contigui debbon opporsene altri due anche contigui; dal che potran dirsi in essi

DEFINIZIONE IV.

§. 452. Lati opposti quelli, che tramezzano angoli relativamente opposti; cioè, che ànno in essi gli estremi alterni, giacchè si mostreran paralleli.

CO-

COROLLARIO.

§. 453. Gli assi dunque anche in si fatti Solidi uniscono gli estremi alterni de' lati opposti.

DEFINIZIONE V.

§. 454. Corde son le rette, che uniscono gli estremi corrispondenti de' lati opposti.

LEMMA I.

§. 455. *Le rette, che uniscono i punti medii de' lati contigui di un angolo di un Solido Regolare sono in un piano, e comprendono un rettilineo regolare simile ad ogn' interno rettilineo dello stesso Solido Regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I, e II. Rappresenti ABCDEF quella piramide angolare, che taglia da un qualunque Solido Regolare la base del suo angolo A; e siano GHIKL i punti medii de' lati convenuti nello stesso angolo; e siano Fig. 29.

R 2 in

in fine i contigui di questi uniti dalle rette GH HI IK KL LG.

Queste rette, dividendo proporzionatamente i lati de' triangoli ABC ACD ADE AEF AFB; saran relativamente parallele ai lati del sottoposto rettilineo; comprenderanno dunque angoli a quelli del rettilineo sottoposto eguali, e sarà il piano d'ognuno di quegli angoli al piano del sottoposto rettilineo parallelo; saran dunque quegli angoli in un piano alla base parallelo, altrimente i diversi piani di essi sarebbero anche paralleli tra loro, e si sarebbero incontrati; ma in ogni piramide il piano alla base parallelo è un rettilineo simile alla base; le rette dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 456. Produce dunque la Seconda Operazione sotto gli angoli dell'Ottaedro sei quadrati; sotto quelli del Cubo otto triangoli equilateri, sotto quelli del Dodecaedro venti; e sotto quell'in fine dell'Icosaedro dodici pentagoni regolari(§ 21).

CO-

COROLLARIO II.

§. 457. La Seconda Operazione taglia dalle angolari piramidi del Solido Regolare Corrispondente tante altre picciole piramidette a quelle simili, e l'ottava parte di ognuna di esse; giacchè ne sono i lati omologhi : : 1 : 2.

LEMMA II.

§. 458. *Nel triangolo equilatere, nel quadrato, nel pentagono regolare, unendo il punto medio d'ogni lato con quelli de' lati contigui, si costituisce in ciascuno di essi un simile rettilineo regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I. I triangoli ADF BDE CEF ànno per l'ipotesi due lati eguali a due lati, e gli angoli in quelli compresi eguali; eguali anche avran dunque le basi; e perciò DEF è un triangolo equilatere. Fig. 30.

II. Per la stessa ragione EFGH sarà un quadrilatere equilatere, e perciò pa- Fig. 31.

rallelogrammo; ma è retto l'angolo FEH, essendo semiretti gli angoli AEF DEH; dunque è quadrato.

Fig. 32. III. Per la stessa ragione FGHIK sarà un pentagono equilatere; ma essendo FG parallela ad AC, FK parallela a BE, per la proporzionale divisione che fanno de' rispettivi lati; saranno parallele a CD DE lati a quelle corde opposti, e sarà perciò l'angolo GFK eguale all'angolo CDE; e così per la stessa ragione saran tutti gli altri angoli dell'interno pentagono eguali agli altri angoli dell'esterno; sarà dunque FGHIK un pentagono Regolare. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 459. E poichè tagliando dai Solidi Regolari gli angoli Solidi con quei piani, che nascono in essi unendo i punti medii de' lati contigui convenuti in ogni di lor angolo Solido, resta ne' piani di essi, cioè ne' triangoli equilateri, ne' quadrati, ne' pentagoni regolari, unito il punto medio d'ogni lato con quelli de' lati contigui; nascon dunque colla

se-

ſeconda Operazione ne' piani dell' Ottaedro, del Cubo, del Dodecaedro, dell' Icoſaedro ſimili rettilinei regolari; naſcon perciò ne' piani dell' Ottaedro otto triangoli equilateri; in quelli del Cubo ſei quadrati, in quelli del Dodecaedro dodici pentagoni regolari, ed in quelli in fine dell' Icoſaedro venti triangoli equilateri.

COROLLARIO II.

§.460. Ma ſono sì nati piani in ognuno di quei Solidi anche relativamente equilateri (§ 445); ſaranno dunque quei triangoli, quei quadrati, quei pentagoni, non ſolo regolari, ma anche eguali.

AVVERTIMENTO.

§. 461. Se dalla ſola reciſione degli angoli ſi ſon veduti naſcere i piani ſotto gli angoli, e gli altri nei piani; dovrem dire, che ne' Solidi di ſeconda operazione ogni lato ſia comune ad un piano degli angoli ad uno de' piani; ſicchè in queſti Solidi ogni piano degli angoli aderiſce ſolo a quelli de' piani, ed ognuno de' piani ſolo a quelli degli angoli (§ 5).

rallelogrammo; ma è retto l'angolo FEH, essendo semiretti gli angoli AEF DEH; dunque è quadrato.

Fig. 32. III. Per la stessa ragione FGHIK sarà un pentagono equilatere; ma essendo FG parallela ad AC, FK parallela a BE, per la proporzionale divisione che fanno de' rispettivi lati; saranno parallele a CD DE lati a quelle corde opposti, e sarà perciò l'angolo GFK eguale all'angolo CDE; e così per la stessa ragione saran tutti gli altri angoli dell'interno pentagono eguali agli altri angoli dell'esterno; sarà dunque FGHIK un pentagono Regolare. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 459. E poichè, tagliando dai Solidi Regolari gli angoli Solidi con quei piani, che nascono in essi unendo i punti medii de' lati contigui convenuti in ogni di lor angolo Solido, resta ne' piani di essi, cioè ne' triangoli equilateri, ne' quadrati, ne' pentagoni regolari, unito il punto medio d'ogni lato con quelli de' lati contigui; nascon dunque colla

se-

ſeconda Operazione ne' piani dell'Ottaedro, del Cubo, del Dodecaedro, dell'Icoſaedro ſimili rettilinei regolari; naſcon perciò ne' piani dell'Ottaedro otto triangoli equilateri, in quelli del Cubo ſei quadrati, in quelli del Dodecaedro dodici pentagoni regolari, ed in quelli in fine dell'Icoſaedro venti triangoli equilateri.

COROLLARIO II.

§.460. Ma ſono sì nati piani in ognuno di quei Solidi anche relativamente equilateri (§ 445); ſaranno dunque quei triangoli, quei quadrati, quei pentagoni, non ſolo regolari, ma anche eguali.

AVVERTIMENTO.

§. 461. Se dalla ſola reciſione degli angoli ſi ſon veduti naſcere i piani ſotto gli angoli, e gli altri nei piani; dovrem dire, che ne' Solidi di ſeconda operazione ogni lato ſia comune ad un piano degli angoli ad uno de' piani; ſicchè in queſti Solidi ogni piano degli angoli aderiſce ſolo a quelli de' piani, ed ognuno de' piani ſolo a quelli degli angoli (§ 5).

PROPOSIZIONE I.

§. 462. *I Solidi, che nascono dalla Seconda Operazione nell' Ottaedro, e nel Cubo son terminati da otto eguali triangoli equilateri, e sei eguali quadrati, così combinati, che ad ogni triangolo aderiscano solo quadrati ad ogni quadrato solo triangoli.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Nascono dalla Seconda Operazione ne' piani dell' Ottaedro otto eguali (§ 460) triangoli equilateri (§ 459), sotto gli angoli dello stesso sei eguali quadrati (§ 456); e nascono dalla stessa operazione sotto gli angoli del Cubo otto eguali triangoli equilateri, ne' piani dello stesso sei eguali quadrati; i Solidi dunque, che dalla Seconda Operazione nascon nell'Ottaedro, e nel Cubo son come s'è proposto terminati.

II. Ma in sì fatti Solidi ogni piano, che nasce ne' piani aderisce solo a quelli, che nascono sotto gli angoli, ed ognu-

no

no di questi aderisce solo a quelli, che nascon ne' piani (§ pr); son dunque i piani di tali Solidi anche combinati, come s'è detto, e D. D.

COROLLARIO I.

§. 463. I Solidi, che nascono nell' Ottaedro, e nel Cubo dalla Seconda Operazione son simili.

COROLLARIO II.

§. 464. L' espressa combinazione de' piani di sì fatti Solidi importa, che in ogni Solido di lor angolo siano due angoli di triangoli, due di quadrati collo stess' ordine disposti.

PROPOSIZIONE II.

§. 465. *I Solidi, che nascono nel Dodecaedro, e nell' Icosaedro dalla Seconda Operazione son terminati da venti eguali triangoli equilateri, e dodici eguali pentagoni regolari disposti in modo, che ad ogni triangolo aderiscano solo pentagoni, ad ogni pentagono solo triangoli.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I. La Seconda Operazione produce ſotto gli angoli del Dodecaedro venti eguali triangoli equilateri (§ 456), e ne' piani dello ſteſſo dodici eguali pentagoni regolari (§ 460); e produce per l'oppoſto ne' piani dell'Icoſaedro venti eguali triangoli equilateri ſotto gli angoli dello ſteſſo dodici eguali pentagoni regolari; I Solidi dunque, che dalla Seconda Operazione naſcono nel Dodecaedro, ed Icoſaedro ſon terminati dai piani propoſti.

II. Ma in sì fatti Solidi ogni piano, che naſce ne' piani aderiſce ſolo a quelli, che naſcon ſotto gli angoli, ognuno di queſti ſolo a quelli de' piani (§ 461); Son dunque i di loro piani anche combinati, come s'è detto, e D. D.

COROLLARIO I.

§. 466. I Solidi, che naſcono nel Dodecaedro, ed Icoſaedro dalla Seconda Operazione ſon ſimili.

COROLLARIO II.

§. 467. In ogni Solido di lor angolo convengono due angoli di triangoli, due di pentagoni collo stess'ordine.

AVVERTIMENTO I.

§. 468. I Solidi dunque di Seconda Operazione non sono, che due; giacchè son simili quelli dell'Ottaedro, e del Cubo (§ 463), simili quelli del Dodecaedro, ed Icosaedro; ed è notabile, come da Solidi tanto dissimili si producano dalla stessa operazione Solidi Simili.

AVVERTIMENTO II.

§. 469. Dal che il Solido nato sia nell'Ottaedro, sia nel Cubo sarà detto Solido Primo di Seconda Operazione; e quello nato nel Dodecaedro, od Icosaedro Solido Secondo; sicchè sarà al Primo corrispondente l'Ottaedro, ed il Cubo, ed è in fatti terminato dai piani dell'uno, e dell'altro; e sarà al Secondo

do corrispondente il Dodecaedro, ed Icosaedro; ed è in fatti terminato dai piani del primo, e del secondo.

PROPOSIZIONE III.

§. 470. *In ogni Solido di Seconda Operazione gli assi son eguali, e tutti s'intersegano nello stesso punto bifariam.*

DIMOSTRAZIONE.

I, e II. I Solidi Regolari, che àn lati opposti son quelli, ne' quali si producono i Solidi di Seconda Operazione (§ 443). Tali lati opposti sono nello stesso piano, e paralleli (*a*), ed il centro de' Solidi Regolari ritrovasi in tutt' i piani di essi, giacchè in esso s'intersegano gli assi, che ne uniscono gli estremi alterni (*b*); ma ne' Solidi Regolari le rette che uniscono il centro co' punti medii de' lati sono ai lati perpendiculari, e sono eguali (*b*); dunque di queste quelle, che apparten-

gono

(a) § 87 § 144 § 207 § 273.
(b) § 93. 146. 223. 280.

gono ai lati oppoſti ſono in diretto, è forman perciò tante rette, che oltre di eſſere ai lati perpendiculari, ſono eguali, e nel centro, per cui paſſa ciaſcuna s'interſegan *biſariam*; ma queſte rette ſon gli aſſi de' Solidi di Seconda Operazione (§ 450). In ogni Solido dunque di Seconda Operazione gli aſſi ſono eguali, e tutti nel medeſimo punto s'interſegan *biſariam*. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 471. Perchè queſto punto ſi dirà centro de' Solidi di Seconda Operazione; potrà perciò dirſi, che ſia il centro d'ogni Solido di Seconda Operazione lo ſteſſo, che il centro dei Solidi Regolari corriſpondenti.

COROLLARIO II.

§. 472. Ad ogni Solido di Seconda Operazione potrà circoſcriverſi la Sfera, ed alla Sfera potrà crederſi iſcritto ogni Solido di Seconda Operazione; dal che l'aſſe, o ſemiaſſe del Solido di Seconda

Ope-

Operazione è lo stesso, che l'asse, o semiasse della Sfera circoscritta allo stesso.

COROLLARIO III.

§. 473. Se in un Solido di Seconda Operazione si tirino gli assi, resterà diviso in tante piramidi quanti sono i suoi piani; resterà perciò da tale operazione diviso il Primo in otto piramidi triangolari, e sei quadrate; il Secondo in venti piramidi triangolari, e dodici pentagone.

COROLLARIO IV.

§. 474. Essendo tutti non solo isosceli, ma relativamente equilateri i triangoli, che in ciascuno di questi Solidi fanno i semiassi ne' lati; saranno 1.° eguali tutti gli angoli, che in ciascuno di essi fanno gli assi, ne' lati. 2.° saranno in ciascuno di essi i lati dal centro equidistanti.

PROPOSIZIONE IV.

§. 475. *Ne' Solidi di Seconda Operazione i lati opposti son paralleli.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Essendo in questi Solidi assi le rette, che unifcono gli estremi alterni de' lati oppofti (§ 453), ed interfegandosi gli assi tutti in un punto; saranno i lati oppofti nel piano degl' interfecati rifpettivi assi; ma così gli assi ne unifcono gli estremi alterni, che tutti eguali in effi coftituifcano gli angoli (§ pr); Son dunque in questi Solidi i lati oppofti paralleli. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 476. Le Corde che unifcono gli estremi corrifpondenti de' lati oppofti (§454) chiudono con essi dei parallelogrammi rettangoli; giacchè di questi gli eguali assi son diagonali; dal che 1.° sarà il quadrato dell' asse eguale al quadrato del lato, e della Corda. 2.° essendo eguali i lati, eguali gli assi, eguali anche saranno le corde.

AVVERTIMENTO.

Figure solide. §. 477. Dal parallelismo de' lati opposti di sì fatti Solidi può volentieri mostrarsi 1.° Che in essi ogni piano ne abbia un altro simile parallelo. 2.° Che de' lati del Solido Primo ne sian sei nello stesso piano, e che questi comprendano un Esagono Regolare. 3.° Che ne' suoi 24. lati si distinguano quattro di tali esagoni; i quali s' intersegano per gli angoli opposti, con tale inclinazione, che formino co' di loro lati gli alterni triangoli, e quadrati terminanti tal Solido. 4.° Che nel Solido Secondo de' suoi lati se ne distinguan dieci nello stesso piano, e che questi comprendan del pari un Decagono Regolare. 5.° Che ne' suoi 60. lati si distinguan sei di tali Decagoni; e che questi in fine s'interseghino per gli angoli opposti con tale inclinazione, che formino co' di loro lati gli alterni triangoli, e pentagoni terminanti tal Solido.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

§. 478. *Nel Solido Primo di Seconda Operazione l'asse è il doppio del lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Il lato del Solido, che nasce colla Seconda Operazione nell'Ottaedro è la metà del lato dell'Ottaedro; perchè base d'un triangolo equilatere della metà del suo lato (§ 444); ma essendo nell'Ottaedro lati opposti quelli, che son tali ne' suoi quadrati (§ 65); la retta, che unisce i punti medii de' suoi lati opposti, cioè l'asse del Solido, che nasce in esso dalla Seconda Operazione (§ 450), eguaglia il suo lato; dunque nel Solido, che nasce nell'Ottaedro dalla Seconda Operazione l'asse è il doppio del lato. Figure olide

Il lato del Solido, che nasce nel Cubo dalla Seconda Operazione è la metà della diagonale di un quadrato del Cubo, giacchè tagliando queste parti dai lati è a quella parallelo; e la retta, che unisce i punti medii de' suoi lati oppo-

sti, cioè l'asse del Solido, che nasce in esso dalla Seconda Operazione (§ 450), eguaglia la stessa Diagonale; giacchè con essa unisce gli estremi degli opposti (e perciò paralleli) ed eguali semilati; dunque nel Solido nato nel Cubo dalla Seconda Operazione l'asse è il doppio del lato; e perciò nel Solido Primo &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 479. Il Solido Primo di Seconda Operazione è iscrittibile in quella Sfera il di cui ragio eguaglia il suo lato (§ 472).

COROLLARIO II.

§. 480. Se in questo Solido si tirino gli assi saran tutti equilateri i triangoli, che i semiassi fanno ne' lati; e perciò resterà tal Solido diviso dagli assi in otto piramidi regolari, e sei piramidi quadrate Ottaedrali del suo lato.

CO-

COROLLARIO III.

§. 481. Essendo nell'Ottaedro il quadrato del lato a quello dell' asse, come $1 : 2 = 2 : 4$ (§ 94); sarà quello del lato a quello del semiasse, o sia a quello dell' altezza della sua piramide quadrata, come $2 : 1 = 6 : 3$ (§ 95); ma nella Piramide Regolare il quadrato del lato è a quello del suo asse, o sia della sua altezza (§ 35), come $3 : 2 = 6 : 4$ (§ 51); dunque il quadrato dell'altezza della prima è a quello dell' altezza della seconda, dando ad esse egual' i lati, come $3 : 4$, e perciò così sono i quadrati delle distanze, che ànno dal centro nel Solido Primo di Seconda Operazione i suoi quadrati, ed i suoi triangoli (§ pr); non sarà dunque in esso iscrittibile la Sfera.

AVVERTIMENTO I.

§. 482. Questo Solido dunque à di comune co' Solidi Regolari il comprendere un punto dagli angoli (§ 470), e dai lati equidistante (§ 474); di proprio

il non esser tal punto anch' equidistante dai piani (§ pr); le distanze però, che à il centro dai piani simili sono eguali, siccome eguali sono le altezze delle piramidi regolari, e piramidi quadrate Ortaedrali di lati eguali.

AVVERTIMENTO II.

§. 483. Anche i piani del Solido Secondo sono dal centro egualmente distanti i simili, inegualmente distanti i dissimili; si conosce il primo dall' esser delle Piramidi simili, e similmente poste (come son quelle de' piani simili, nelle quali è diviso quel Solido dagli assi) eguali le altezze; si conosce il secondo dall' essere i quadrati delle altezze di sì fatte dissimili piramidi eguali alle differenze de' quadrati in una del Semiasse, e del ragio triangolare di circoscrizione, in un' altra dello stesso semiasse, e del ragio pentagonale di circoscrizione, e dall' esser tal Solido equilatere (§ 445).

COROLLARIO.

§. 484. E' dunque proprio de' Solidi di Seconda Operazione il convenir co' Solidi Regolari nelle due prime equidiſtanze (§§ 470, 474); e'l non convenire nell' ultima.

PROPOSIZIONE VI.

§. 485. *Il Solido Primo di Seconda Operazione è ventuplo della Piramide Regolare del ſuo lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Reſta queſto diviſo dagli aſſi in otto piramidi regolari, e ſei piramidi quadrate Ottaedrali del ſuo lato (§ 480); ma ognuna di queſte è doppia d'ognuna di quelle (§ 61); dunque il Solido Primo di Seconda Operazione è ventuplo della Piramide Regolare del ſuo lato. C.D.D.

PROPOSIZIONE VII.

§. 486. *Il Solido colla Seconda Operazione nato nell' Ottaedro ſta all' Ottaedro, come* 5 : 8.

DIMOSTRAZIONE.

Ogni piramidetta, che colla Seconda Operazione ſi taglia dall' Ottaedro è ſimile alla ſua piramide quadrata, e l'ottava parte di quella (§ 457); ſaran dunque tutte le piramidette con quella Operazione tagliate dall' Ottaedro alla ſua piramide quadrata, come 6 : 8 = 3 : 4; all' Ottaedro, come 3 : 8 (§ 88); e ſarà perciò quel, che queſte laſciano dell' Ottaedro, cioè il Solido di Seconda Operazione all' Ottaedro, come 5 : 8. C.D.D.

COROLLARIO.

§. 487. Sarà perciò il Solido Primo di Seconda Operazione all' Ottaedro del ſuo lato, come 5 : 1 (§ 444).

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

§. 488. *Il Solido colla Seconda Operazione nato nel Cubo sta allo stesso, come 5 : 6.*

DIMOSTRAZIONE.

Ogni piramidetta colla Seconda Operazione tagliata dal Cubo sta alla piramide angolare dello stesso, come 1 : 8 (§ 457); tutte dunque le così tagliate eguagliano una di queste; ma una di queste sta al Cubo come 1 : 6 (§ 175); dunque anche quelle, e perciò starà quanto quelle lasciano del Cubo (cioè il Solido nato nello stesso colla seconda Operazione) al Cubo, come 5 : 6. C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 489. *Ogn' interno rettilineo de' Solidi di seconda operazione è in un piano, ed è iscrittibile al cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

I. e II. Son questi Solidi equilateri (§ 445), ed iscrittibili alla Sfera (§ 472); è dunque ogn' interno di lor rettilineo in un piano, ed è iscrittibile al cerchio (§ 83); C. D. D.

PROPOSIZIONE X.

§. 490. *Ogn' interno rettilineo de' Solidi di Seconda Operazione è rettangolo.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo de' quattro angoli convenuti in ogni angolo di sì fatti solidi eguali gli opposti (*a*), e tutti da eguali lati compresi (§ 445); saranno i piani ad essi sottoposti (§ pr), quadrilinei, ne' quali son eguali i lati opposti; e perciò parallelogrammi; ma sono iscrittibili al cerchio (§ pr), ed i parallelogramm' iscrittibili al cerchio son rettangoli; rettangolo

(a) 464. 467.

golo è dunque ogn'interno rettilineo de' Solidi di Seconda Operazione C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 491. Essendo de' lati intorno ad un angolo d'ogni sì fatto rettangolo, nel Solido Primo, uno lato dello stesso Solido, l'altro diagonale de' suoi quadrati; e nel Secondo, uno lato dello stesso Solido, l'altro corda de' suoi pentagoni; ed essendo in sì fatti Solidi eguali i lati, e perciò anche eguali tanto le diagonali del Primo, quanto le corde del Secondo; saranno in ognuno di sì fatti solidi simili, ed eguali gl'interni rettangoli.

COROLLARIO II.

§. 492. E poichè sono tanto ne' quadrati, quanto ne' pentagoni regolari ai lati proporzionali le diagonali, le corde; saranno perciò sì fatti rettangoli anche simili appartenendo a diversi Solidi Primi, o a diversi Solidi Secondi.

CAPO



CAPO X.

Delle proprietà della Sfera, delle quali si viene a notizia da quelle de' Solidi Regolari, e di Seconda Operazione.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 493. Più Sfere, che si toccano si diranno annularmente congiunte, se di esse ognuna ne tocchi altre due; perchè in tale posizione l'ultima della successiva congiunzione è necessario, che anche sia colla prima congiunta; e così le rette, che uniscono di quelle, che si toccano i centri chiudano spazio. Così perchè le Sfere A B C D (*fig.* 33), quantunque si tocchino l'una l'altra, di esse però l'estreme non ne toc-

toccan, che una, onde le rette, che unifcono di quelle, che fi toccano i centri non chiudono fpazio, non poffon dirfi annularmente congiunte; Le Sfere poi EFH (*fig.* 34) IKLM NOPQR (*fig.* 35) fono annularmente congiunte, perchè ognuna ne tocca altre due, e così le rette, che unifcono i centri delle toccantifi chiudono fpazio.

DEFINIZIONE II.

§. 494. I varj rettilinei, che poffono efibire gli uniti centri di varie sfere eguali annullarmente in diverfa forma congiunte daran nome alle varie combinazioni delle medefime; quindi fi diranno combinate a triangolo, a quadrangolo, a pentagono, fe tali fiano que' di loro rettilinei.

AVVERTIMENTO.

§. 495. Potendo le sfere annularmente congiunte effer nello fteffo piano, ed in diverfo, poffon perciò i rettilinei che danno gli uniti centri di effe effer uno

fteffo

ſteſſo piano, e diverſi; perciò col nome di rettilineo quì non s'intende un piano rettilineo, ma un ſucceſſivo, ed annulare congiungimento di rette.

COROLLARIO I.

§. 496. Poichè però il triangolo è ſempre uno ſteſſo piano, perciò il rettilineo, che danno tre sfere eguali annularmente congiunte è ſempre un piano rettilineo.

COROLLARIO II.

§. 497. Paſſando ogni retta che uniſce i centri di due sfere, che ſi toccano, (come fa ogni lato d'ogni sì fatto rettilineo) pel punto del contatto, sarà ogni lato d'ogni sì fatto rettilineo l'aggregato di due eguali ragi, e sarà perciò ogni sì fatto rettilineo equilatere; e l'eſibito da tre sfere eguali annularmente congiunte sarà un piano triangolare equilatere.

LEMMA

LEMMA I.

§. 498. *De' rettilinei quadrangoli esibiti da Sfer' eguali annularmente congiunte ciascuna diagonale è maggiore del lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Non può dirsi MK eguale al lato MI, perchè allora si toccherebbero anche le Sfere poste co' centr' in M K, e sarebbero quelle Sfere combinate in due triangoli aderenti, come sono le Sfere E F G H (*fig.* 34), e non in un quadrangolo, locchè è contro l' ipotesi; nè può dirsi minore, perchè allora in MK non potrebbero essere i centri di due Sfere eguali ad I; locchè parimente distruge l' ipotesi; dunque &c. C. D. D. Fig. 35.

AVVERTIMENTO.

§. 499. Così per la stessa ragione delle Sfere combinate a pentagono, o in qualunque altra combinazione di maggior numero di lati le rette LO LP (*fig.* 35) che

che uniſcono i centri di quelle, che ſono negli angoli non contigui ſon ſempre maggiori del lato LK del rettilineo medeſimo.

COROLLARIO I.

§. 500. Poichè nel ſolo triangolo non vi ſon angoli non contigui, cioè, che non abbiano un lato comune, che li uniſce, perciò delle ſole sfere combinate a triangolo non ve ne ſono, che non ſi toccano; di quelle combinate a quadrangolo ve ne ſon due coppie, che non ſi toccano, di quelle combinate a pentagono ve ne ſon cinque, e così molto più in appreſſo; ſarà dunque giuſto l'aſſerire, che delle sfere annularmente congiunte le maſſimamente aderenti ſiano le combinate a triangolo, poi quelle combinate a quadrangolo, e così gradatamente in appreſſo; ſicchè le maſſimamente aderenti ſaran quindi le ſteſſe, che le aderenti a triangolo.

COROLLARIO II.

§. 501. Quindi, poichè una Sfera ſarebbe da per tutto circondata, e toccata dal

dal massimo numero di altre Sfere eguali a se, ove sian queste tutte massimamente aderenti; potrem dire, che questo avverrebbe, ove fusser tutte aderenti a triangolo.

LEMMA II.

§. 502. *Se sopra tre Sfer'eguali A B C annularmente congiunte nel triangolo ABC si metta la quarta D parimenti eguale in modo, che le tocchi tutte tre, e si unischi il suo co' centri di quelle, resterà fatta su quel triangolo una piramide Regolare.* Fig.36.

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo, per l'ipotesi la quarta Sfera sopra le tre prime, sarà il suo centro D fuori la direzione del triangolo ABC, che passa per gli centri di quelle; le rette dunque, che l'uniscono co' centri di quelle, e perciò co' vertici di quel triangolo costituiscono in esso una piramide triangolare.

II. Ma sono in questa equilateri i triangoli tutti (§ 497); sarà dunque Regolare (§ 31) C. D. D.

AV-

AVVERTIMENTO.

§. 503. Si dirà, che un rettilineo sii adattato in una Sfera, se tutti i suoi angoli ne tocchino la superficie.

LEMMA III.

Fig.36. §. 504. *Le rette, che unifcono i punti E F G, ne' quali la quarta Sfera D tocca le tre prime annularmente congiunte comprendono un triangolo equilatere del comun ragio, che resta nella Sfera D adattato.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Avendo i triangoli EDF FDG GDE gli angol' in D di triangoli equilateri (§ 497), ed i lati DE DF DG eguali per ipotesi; saranno tutti eguali triangoli equilateri, e sarà perciò il triangolo EFG non solo equilatere, ma del lato eguale al comun ragio delle Sfere.

II. Ma avendo dall' ipotesi ogni lato di questo gli estremi in due punti della superficie della quarta Sfera D; saranno in

in tre punti di essa tutti i suoi angoli; sarà dunque il triangolo EFG nella quarta Sfera D adattato; e perciò le rette &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 505. Se fusse dunque la Sfera D da per tutto circondata, e toccata da altre Sfere eguali a se sommamente aderenti, o sia combinate a triangolo, e si unissero in essa tutti i punti del contatto, resterebbe nella stessa iscritto un Solido da per tutto terminato da eguali triangoli equilateri di lati eguali al suo ragio.

AVVERTIMENTO.

§. 506. Così del pari si osserva, che se le Sfere circondanti, e toccanti (che saran dett' esteriori) altra Sfera eguale a se, (che sarà detta interiore) siano combinate parte a triangolo, e parte a quadrilatere, imprimeranno queste nella interiore tali punti di contatto, che unitine i contigui, cioè gl' impressi dalle Sfere, che si toccano, si avrà un Solido

 iscrit-

iscritto nella interiore di lati tutti eguali al suo ragio terminato da triangoli, e quadrilateri.

COROLLARIO II.

§.507. Ogni retta, che unisce i punti, ne' quali una Sfera ne tocca altre due eguali a se, che si toccano eguaglia il comun ragio; dal che segue, 1.° se due punti presi nella superficie Sferica distino tra se pel ragio della Sfera stessa, potrà quella Sfera esser in quei punti toccata da altre due sfere a se eguali, che si toccano; 2.° se siavi perciò un Solido iscrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al suo ragio, iscritto questo nella Sfera disegnerà co' suoi angoli tali punti in essa da poter esser in quelli simultaneamente toccata da tante altre Sfere eguali a se, quanti sono i suoi angoli, che si tocchino nelle combinazioni espresse dai piani del Solido; e siccome un tal Solido col numero de' suoi angoli additerebbe il numero dell' esteriori Sfere toccanti; così col numero de' lati convenuti in ogni suo angolo solido, mostrandoci ciascun suo angolo solido a quanti

ti altri angoli sia contiguo, ci farebbe conoscere, ogni esterna Sfera quante altre esterne ne tocchi; 3.° se poi i punti presi nella Sfera sian tali, che la retta, che l'unisce sii minore del suo ragio, non potrà in quelli esser toccata simultaneamente da due Sfere eguali a se; 4.° e se in fine sian tali, che la retta, che l'unisce sii maggiore del suo ragio, lo potrà certamente, ma le Sfere, che in quelli la toccano non si toccheranno tra loro.

PROPOSIZIONE I.

§. 508. *La Sfera non può esser da per tutto toccata da qualunque numero di Sfere eguali a se sommamente aderenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Se potesse la Sfera da per tutto toccarsi da sfere eguali a se sommamente aderenti, uniti in essa i punti del contatto, resterebbe in essa iscritto un solido da per tutto terminato da eguali triangoli equilateri di lati eguali al suo ragio (§ 505); verrebbe dunque ad iscri-

verſele o una Piramide Regolare, o un Ottaedro, o un Icoſaedro di lati eguali al ſuo ragio; ma è maggiore del ragio della Sfera il lato della Piramide (§ 52), dell'Ottaedro (§ 94), dell'Icoſaedro iſcritto in eſſa (§ 300); non può dunque iſcriverſi alla Sfera un Solido sì fatto; e perciò neppur può eſſa da per tutto toccarſi da qualunque numero di Sfere eguali a ſe ſommamente aderenti. C. D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 509. Eſiſtono altri due Solidi anche terminati da eguali triangoli equilateri, e ſon gl'Innominati (§ 414); ma non ſon queſti nella Sfera iſcrittibili (§ 426); ſicchè la di loro eſiſtenza neppur per ombra ſi oppone alla ſtabilita verità.

AVVERTIMENTO II.

§. 510. Se poteva nella Sfera iſcriverſi un ſolido della diſegnata natura il maſſimo numero di ſfere, dalle quali poteva una Sfera da altre eguali toccarſi, ſarebbe ſtato dodici (§ 507), quanti

cioè

cioè, son gli angoli dell'Icosaedro, che più ne abbonda; e siccome nell'Icosaedro ogni angolo solido ne à altri cinque contigui, così allora ognuna dell' esteriori Sfere ne avrebbe toccate altre cinqu'esteriori annularmente congiunte.

PROPOSIZIONE II.

§. 511. *Può la Sfera simultaneamente toccarsi da dodici altre Sfere eguali a se non tutte sommamente aderenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Solido Primo di Seconda Operazione è iscrittibile in quella Sfera, il di cui ragio eguaglia il suo lato (§ 479); iscritto dunque questo nella Sfera disegnerà in essa co' suoi angoli tali punti, da poter esser in quelli simultaneamente toccata da tante altre Sfere eguali a se, che si toccano nelle combinazioni espresse dai suoi piani (§ 507); ma son dodici gli angoli di un tal Solido (§ 447); e sono i suoi piani triangoli equilateri, e quadrati (§ 462); e disegnano i pri-

 mi

mi la somm' aderenza, e non i secondi (§ 500); può dunque la Sfera simultaneamente toccarsi da dodici altre Sfere eguali a se non tutte sommamente aderenti. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 512. Convenendo in ogni angolo solido del Solido Primo di Seconda Operazione quattro angoli piani (§ 464); e perciò quattro lati (§ 6); sarà in esso ogni angolo solido ad altri quattro contiguo (§ 8), e perciò ciascuna dell'esteriori dodici Sfere, sarà nell'esibita combinazione toccata da altre quattro esteriori (§ 507).

COROLLARIO II.

§. 513. E poichè così convengono in ogni angolo di un tal Solido quattro lati, che comprendano in esso due angoli di triangoli equilateri, e due di quadrati, e così combinati, che non aderiscano due di questi angoli simili, che ne' soli vertici (§ 464); perciò delle quattro Sfere esteriori, dalle quali ogni altra este-

esteriore è toccata nell' esibita combinazione due coppie di prospetto son colla quinta sommamente aderenti, le altre due coppie le sono nell'aderenza prossima alla massima (§ 500).

AVVERTIMENTO I.

§.514. Se poteva nella Sfera iscriversi un Solido da per tutto terminato da eguali triangoli equilateri di lati eguali al suo ragio, poteva la Sfera esser da per tutto simultaneamente toccata da Sfere eguali a se sommamente aderenti (§ 505) ed il massimo numero di queste sarebbe stato dodici (§ 510); Ora la vediamo toccata da dodici non tutte sommamente aderenti? Par che questo a quello si opponga; ma non è punto così; giacchè, essendo il lato dell' Icosaedro maggiore, e non minore del ragio della Sfera, in cui è iscrittibile (§ 300), posson benissimo ne' punti disegnati dagli angoli dell' Icosaedro adattarsi dodici sfere eguali all' interiore, ma queste toccheran quella, ma non si toccheranno tra loro (§ 507); ecco perchè le stesse dodici sian sufficien-

ti a toccarsi anche tra loro in una combinazione, in cui non tutte sommamente aderiscano.

AVVERTIMENTO II.

§. 515. Dalla cognizione de' Solidi Regolari s'è dedotto, che non possa la Sfera toccar simultaneamente qualunque numero di altre sfere eguali a se sommamente aderenti; e da quella del Solido Primo di Seconda Operazione, che possa toccarne dodici, ma non tutte sommamente aderenti; resta dunque a vedersi, se la combinazione delle dodici additata da quel Solido sia quella, nella quale l' esteriori abbian tra se la massima possibile aderenza, per poter quindi giustamente asserire, che non possa la Sfera toccar più di dodici altre Sfere eguali a se. Questo si vedrà nelle seguenti proposizioni, premesse alcune definizioni, ed assiomi.

DEFINIZIONE I.

§. 516. Un angolo Solido si dirà equilatere, se ne siano tutti eguali i lati.

DE-

DEFINIZIONE II.

§. 517. Un angolo Solido si dirà adattabile nella Sfera, se immesso in essa in modo, che il suo vertice ne tocchi la superficie, tutti gli estremi de' suoi lati la tocchino simultaneamente in tanti altri punti.

DEFINIZIONE III.

§. 518. Un angolo Solido adattabile nella Sfera, se abbia gli estremi de' suoi lati nello stesso piano, perchè adattato in essa l'avrà nella periferia della stessa sua sezione, si dirà compreso, o comprensibile da quella porzione Sferica, che vien tagliata dalla stessa sezione.

COROLLARIO I.

§. 519. Di un angolo solido comprensibile in porzione Sferica sarà l'interno, e sottopostogli rettilineo iscrittibile al cerchio, ch'è base della stessa porzione; e perciò se di un angolo solido non sia il sottopostogli rettilineo iscrittibile al cerchio,

chio, non sarà comprensibile in porzione sferica.

COROLLARIO II.

§. 520. Poichè di un angolo Solido adattato nella Sfera restano i lati tutti adattati nella stessa (§ 80 e 517); perciò, se un angolo Solido adattato nella Sfera sia equilatere, perchè allora à gli estremi de' lati nello stesso piano (§ 82); sarà compreso da Sferica porzione, quella cioè, che vien tagliata dal piano, nel quale son gli estremi de' lati di esso, e ne sarà il sottopostogli rettilineo iscrittibile al cerchio (§ 82).

COROLLARIO III.

§. 521. Se di un angolo Solido equilatere, e comprensibile in porzione Sferica uno, o più lati si faccian muovere con i soli estremi, che sono nella periferia della base della porzione medesima, senza però uscire dalla stessa periferia, resterà tuttavia comprensibile dalla stessa porzione; ma se quell' uno, o più lati si faccia, o faccian muovere uscendo da

quel-

quella periferia, resterà da quella mossa l'angolo così alterato, che non sarà più comprensibile da quella porzione.

DEFINIZIONE IV.

§. 522. Porzioni Omologhe di Sfere si diran quelle, che o tutte comprendono, o tutte escludono il centro delle rispettive Sfere.

DEFINIZIONE V.

§. 523. Si dirà lato della porzione Sferica qualunque retta, che estendesi dal suo vertice ad un qualunque punto della periferia della sua base.

COROLLARIO.

§. 524. Eguagliando il quadrato d'ogni lato di Sferica porzione i quadrati fatti uno nell'altezza, e l'altro nel raggio della base della porzione medesima, saranno tutti eguali i lati d'ogni Sferica porzione.

ASSIOMA I.

§. 525. Ogni retta ſegante la Sfera non tocca la ſua ſuperficie, che in due ſoli punti.

ASSIOMA II.

§. 526. La ſuperficie Sferica è in ogni ſua parte uniformemente incurvata.

COROLLARIO I.

§. 527. Quindi, poichè ove s'intenda di un Solido inverſa la ſuperficie, così cioè, che i ſuoi piani occultino gli aſpetti eſterni, manifeſtino gl' interni, naſce un Solido al primo del tutto ſimile, ed eguale col ſolo divario, che ſian nel ſecondo i piani, e gli angoli diſpoſti in ordine inverſo di quello, ch' eran nel primo diſpoſti; perciò, ove s'intenda ciò fatto di un Solido iſcrittibile alla sfera, naſcerà un Solido anche nella ſteſſa sfera iſcrittibile.

COROLLARIO II.

§. 528. Le porzioni Sferiche della ſteſſa Sfera, o di Sfer' eguali, ſe ſi ſoprappongano in modo, che il vertice di una vada ſul vertice dell' altra combaceranno in tutta la corriſpondente eſtenſione.

LEMMA.

§. 529. *Ogni angolo Solido di un Solido iſcrittibile alla Sfera è adattabile nella Sfera ſteſſa.*

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo il Solido, a cui quell' angolo appartiene, per ipoteſi, iſcrittibile alla Sfera, iſcritto in queſta, dovranno tutti i ſuoi angoli ſolidi ſimultaneamente toccarla; dovranno perciò toccarla tutti gli eſtremi de' ſuoi lati, che non ſon, che negli angoli; dovrà dunque toccarla ogni angolo ſolido, e gli eſtremi de' lati convenuti nello ſteſſo; negandoſi dunque, che immeſſo quell' angolo ſolido nella

Sfera,

Sfera, (cui è il solido, a cui esso appartiene iscrittibile) in modo, che il suo vertice ne tocchi la superficie, debbano anche gli estremi dei suoi lati simultaneamente toccarla, cioè negandosi l'adattabilità di quell' angolo (§ 517), verrebbe a dirsi esser quella superficie sferica in una sua parte difformemente incurvata, che in un'altra; ma questo ripugna (§ 526); dunque ogni angolo Solido di un Solido alla Sfera iscrittibile è adattabile nella stessa. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 530. **Ogni angolo Solido** di un Solido iscrittibile nella sfera anche rivoltatosi **è adattabile nella sfera stessa** (§ 527).

PROPOSIZIONE III.

§. 531. *Non posson essere nella stessa Sfera iscrittibili due solidi simili, ed ineguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Lo fiano, s'è poffibile, e fiano due omologhi, e perciò eguali (§ 407) angoli di effi ABCD aFGH. Poffon quefti effer combaciabili, e poffon non efferlo (§ 392); fiano in prima tali, e fi fupponga l'angolo a foprappofto corrifpondentemente, e combaciato coll'angolo A; caderanno però gli eftremi de' lati dell' angolo a in punti diverfi da quelli, ne' quali fono gli eftremi dell' angolo A; giacchè altrimente farebbero eguali i lati omologhi di quei folidi, e così eguali i folidi fteffi, locchè è contro l'ipotefi. Fig.16.

Or, ciò fatto, fe fuffero i folidi, ai quali appartengono i folidi angoli A a ifcrittibili nella fteffa Sfera, farebbero quefti angoli in quefta fteffa Sfera adattabili (§ 529), e perciò confiderato in quefta immeffo il raddoppiato angolo ABCD in modo, che il vertice A ne tocchi la fuperficie, dovrebbe ciafcun fuo lato toccar la fteffa in tre punti; ma quefto ripugna (§ 525); non poffon dunque effer nella fteffa Sfera ifcrittibili i difegnati folidi fimili, ed ineguali.

Siano

Siano in secondo quegli angoli incombaciabili, e si supponga uno di essi rivoltarsi, e soprapporsi corrispondentemente all' altro, che si vedran combaciare (§ 394); ma, se tuttavia fussero, come si suppongono, quei solidi, ai quali tali angoli appartengono iscrittibili nella stessa Sfera, sarebber tuttavia tali angoli nella stessa Sfera adattabili (§ 530); avrebbe dunque in essi anche luogo, come nella prima ipotesi, la stessa contraddizione; non posson dunque essere nella stessa Sfera iscrittibili due solidi simili, ed ineguali. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 532. Dallo stesso tenore della precedente dimostrazione s'è veduto, che non possano essere nella stessa Sfera adattabili due eguali angoli solidi, de' quali siano i lati omologhi relativamente ineguali.

AVVERTIMENTO.

§. 533. Ove una Sfera ne tocchi qualunque numero di altre annularmente congiun-

giunte resta con ciascuna coppia delle toccantisi aderente a triangolo; or sì fatta combinazione si vedrà aver luogo fra Sfere eguali poste tutte nel medesimo piano; ma non in quelle, che ne circondano e toccano altra eguale.

LEMMA.

§. 534. *La retta, che unisce i centri di due Sfere eguali poste in un piano è parallela a quella, che unisce nel piano i punti del contatto.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè, essendo ogni retta, che unisce il centro di una Sfera col punto del contatto al piano normale, quelle dell'ipotesi uniscono due rette eguali, e parallele. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 535. Ove dunque una Sfera ne tocchi varie eguali poste tutte nello stesso piano, le rette, che uniscono il suo co' centri di quelle son tutte in un medesimo piano, al piano delle Sfere parallelo.

COROLLARIO II.

§. 536. E poichè nella retta, che unisce i centri delle Sfere, che si toccano trovasi il punto del contatto, perciò i punti, ne' quali una Sfera ne tocca qualunque numero di altre eguali poste tutte nel medesimo piano, sono in un medesimo piano a quello delle Sfere parallelo, ed in esso sono i centri tutti delle Sfere.

COROLLARIO III.

§. 537. I punti dunque, ne' quali una Sfera ne tocca altre eguali a se poste tutte nel medesimo piano, sono in un suo cerchio massimo al piano delle Sfere parallelo.

PROPOSIZIONE IV.

§. 538. *Ogni Sfera può toccarne altre sei eguali a se annularmente congiunte poste tutte nel medesimo piano.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I punti, ne' quali una Sfera ne tocca altre eguali a se poste tutte nel medesimo piano sono in un suo cerchio massimo a quel piano parallelo (§ pr); ma in ogni cerchio massimo della Sfera posson giusto successivi, ed annularmente ligati adattarsi sei ragi della stessa; può dunque ogni Sfera toccarne altre sei eguali a se annularmente congiunte poste tutte nel medesimo piano (§ 507). C. D. D.

PROPOSIZIONE V.

§. 539. *Delle Sfere, che circondano, e toccano altra Sfera eguale a se niuna può toccarne qualsivoglia numero di esse, che sian tra se annularmente congiunte.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, se fusse ciò possibile, restando una sì fatta Sfera con ogni coppia delle toccantisi nell'annulare congiungimento aderente a triangolo (§ 533),

 ove

ove si unissero nella Sfera interiore i punti di sì fatti contatti, si avrebbe adattato (§ 505, e 528) nella stessa un angolo solido fatto da angoli di eguali triangoli equilateri del ragio della sfera; e perciò resterebbe in quella adattato o un angolo di Piramide Regolare, o quello di un Ottaedro, o quello in fine di un Icosaedro, del disegnato lato; ma i lati degli angoli di Piramide Regolare di Ottaedro, d' Icosaedro in quella Sfera adattabili son tutti maggiori del ragio di essa (§§ 52. 94. 300.); nè possono essere nella stessa Sfera adattabili due eguali angoli solidi, de' quali siano i lati omologhi relativamente ineguali (§ 532); non può dunque nella Sfera interiore aver luogo alcun di quegli angoli, e perciò neppur può alcuna dell' esteriori toccarne qualsivoglia numero di esse, che sian tra se annularmente congiunte. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 540. Nella precedente proposizione s' è dedotta l' eguaglianza dell' angolo solido nascente nella Sfera interiore con

quello

quello della Piramide, o dell' Ottaedro, o dell' Icosaedro iscrittibile nella stessa, solo dal dover nascere in quella Sfera un angolo Solido compreso da angoli di triangoli equilateri; ma questo non basta nell' assunta Teoria. Ma basta nell'assunta ipotesi, imperciocchè, nascerebbe quell' angolo, e nascerebbe adattato nella Sfera, ed equilatere; dunque il suo sottoposto rettilineo sarebbe in un piano, e sarebbe iscrittibile al cerchio (§ 82); ma sarebbe questo equilatere, giacchè eguali sarebbero nell' angolo nascente gli angoli piani, ed i lati, nascerebbe dunque regolare (§ 85); sarebbe dunque un triangolo equilatere, un quadrato, un pentagono regolare; secondochè da tre, quattro, o cinque angoli di triangoli equilateri nascesse fatto quell'angolo; corrisponderebbe dunque sempre anche il sottoposto rettilineo dell' angolo nella data ipotesi nascente nella Sfera interiore a quello, ch' è sottoposto ad un angolo della Piramide, o dell' Ottaedro, o dell' Icosaedro; e perciò sarebbe ad un di quegli eguali (§ 406).

COROLLARIO.

§.541. Qualunque dunque sia la combinazione, che si dia all'esterne sfere, che ne toccano altra eguale, deve sempre esser tale, da imprimere nell'interiore tali punti di contatto, che uniti diano un solido iscritto in essa del comun ragio, in ciascun angolo solido del quale debba intervenire angolo non di triangolo equilatere.

LEMMA I.

§. 542. *Nelle Sfere eguali i cerchj eguali sono equidistanti dai rispettivi centri di esse, gli equidistanti sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.21. I. e II. Nell'eguali Sfere AIBC DKEF siano eguali i cerchj CI FK, nei quali tirati due qualunque ragi HC GF, si unisca i punti HC GF col centro della rispettiva sfera.

Essendo per la costruzione le rette OH

OG

OG normali ai piani dei cerchj IC KF, misureranno le distanze, che quei cerchj ànno dai centri delle rispettive Sfere, e saranno i triangoli OHC OGF rettangoli in H G; sicchè sarà tanto nel primo il quadrato di OH la differenza de' quadrati di CO CH, ed il quadrato di CH la differenza de' quadrati di OC OH; quanto nel secondo il quadrato di OG la differenza de' quadrati di FO FG, ed il quadrato di GF la differenza de' quadrati di OF OG; dunque nelle Sfere eguali i cerchj eguali sono equidistanti dai centri di esse, e gli equidistanti sono eguali; locchè è quanto D. D.

LEMMA II.

§.543. *Le porzioni omologhe, che dalla stessa Sfera, o da Sfer' eguali tagliano cerchj eguali son simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo e nella stessa Sfera, e nelle Sfer' eguali i cerchj eguali equidistanti dai rispettivi centri di esse (§ pr), ed essendo

a tali cerchj normali gli eguali diametri delle rispettive sfere, che passano per gli centri di essi; resteran questi divisi da tali centri in parti relativamente eguali; di queste dunque tanto quelle, che comprendono i centri delle rispettive Sfere, quanto quelle, che l'escludono ànno egual ragione agli eguali diametri de' rispettivi cerchj; e perciò le porzioni omologhe, che da Sfer' eguali tagliano cerchj eguali son simili.

Fig.37. II. Le omologhe porzioni ABC DEF si credano tagliate dalla stessa Sfera, o da Sfer' eguali dagli eguali cerchj BC EF, queste saranno simili; sicchè dovendo le di loro altezze DH AG ai diametri dell' eguali lor basi proporzionarsi, saranno eguali; se dunque si supponga la porzione ABC soprapporsi alla porzione DEF, in modo, che vada il piano del cerchio AB sul piano del cerchio EF, e'l centro G sul centro H, caderà l'intero cerchio BC su l'intero cerchio EF a quello dall'ipotesi eguale; e caderà parimente la normale AG su la normale DH, e 'l punto A sul punto D; e perciò l'intera porzione ABC su l'intera porzione

ne

ne DEF (§ 527); sono dunque le porzioni omologhe &c. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 544. Siccome si son vedute simili, ed eguali le omologhe porzioni, che tagliano i cerchj eguali dalla stessa Sfera, o da Sfer' eguali; così può agevolmente vedersi, che delle porzioni simili della stessa Sfera, o di Sfer' eguali siano eguali le altezze, le basi, le Solidità. Se delle simili porzioni ABC DEF appartenenti alla stessa Sfera, o a Sfer' eguali si credano ineguali le altezze AG DH dalla maggiore AG si tagli la parte AI eguale alla minore DH; pel punto I si faccia una seconda sezione KL parallel' a BC, alla quale sarà perciò anche normale l'altezza AG, e così sarà I il suo centro, ed AI l'altezza della porzione AKL; nella sezione BC si tiri qualunque diametro BC, e si unischi AB AC, che incontrano la Sezione KL ne' punti MN, e si uniscano i punti MN; questa retta perchè interfezione de' piani ABC KL dovrà passare per I ad entrambi

trambi comune; prodotta dunque MN si avrà KL diametro di questa sezione; si unifcano in fine i punti AK AL.

Essendo per costruzione il triangolo AKL nello stesso piano del triangolo AMN; sarà nello stesso piano coll' intero triangolo ABC; le rette dunque AB AK si troveranno nello stesso semicerchio di quel cerchio, che nella Sfera imprime il piano del triangolo ABC; e saran perciò ineguali gli angoli KAG BAG, che le stesse fanno nel diametro AG; ma se fusse, come s'è supposta, AI eguale a DH, appartenendo sì fatte porzioni per l' ipotesi alla stessa Sfera, o a Sfer' eguali; sarebbero le porzioni AKL DEF omologhe, e sarebbero i cerchj KL EF eguali, perchè dai rispettivi centri equidistanti (§ 542), sarebbero dunque le porzioni AKL DEF simili (§ pr); ma alla porzione DEF è per l'ipotesi simile la porzione ABC; sarebbe dunque a questa anche simile AKL; e sarebbe perciò AI : IK :: AG : GB; sicchè, essendo anche gli angoli AIK AGB eguali per costruzione perchè retti; sarebbero i triangoli AIK AGB simili, e così eguali gli

an-

angoli KAI BAG, come oppoſti a quelli, che ſarebbero omologhi lati KI BG; ma queſti ſi ſon già veduti ineguali; è falſo dunque, che AI eguagli DH, ed è falſo perciò, che AG ſia ineguale a DH; ma ſe ſon queſt' eguali, eguali ſon anche i cerchj BC EF, perchè dai riſpettivi centri equidiſtanti (§ 542); e ſe queſti ſono eguali, eſſendo le porzioni ABC DEF anche omologhe, dall'eſſerſene vedute eguali le altezze; ſono anch'eguali (§ 543); delle porzioni dunque ſimili della ſteſſa ſfera, o di sfer'eguali ſono eguali le altezze, le baſi, le ſolidità. C. D. D.

LEMMA III.

§. 545. *Ogni lato di Sferica porzione è media proporzionale tra il diametro della Sfera, e l'altezza della ſteſſa porzione.*

DIMOSTRAZIONE.

Nella Sfera AIBC ſia preſa qualunque porzione BIC, ed in queſta eſteſo il lato BC. Da B vertice della ſteſſa porzione Fig. 21.

ne

ne si estenda il diametro BA, questo passerà per H centro della base della stessa porzione, e sarà alla stessa base normale; si unischi AC; finalmente pel piano del triangolo ABC s'intenda fatta alla Sfera un'altra sezione, questa sarà un suo cerchio massimo, che oltre di aver AB per diametro, passerà per C; dal che si conosce che il triangolo ABC sia rettangolo in C, e che CH sia alla sua ipotenusa perpendiculare; sarà dunque AB : BC : : BC : BH, sarà cioe BC lato della porzione Sferica BCI media proporzionale tra il diametro AB della Sfera, e l'altezza BH della stessa porzione. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 546. Delle porzioni della stessa Sfera, o di Sfer' eguali, delle quali sono egual' i lati, sono eguali le altezze.

LEMMA IV.

§. 547. *Le Porzioni della stessa Sfera, o di Sfere eguali, delle quali sono egual' i lati son simili, ed eguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Son di queste eguali le altezze (§ pr). perciò o tutte comprendono, o tutte escludono i centri delle rispettive Sfere; son dunque omologhe (§ 522); ma avendo eguali le altezze son anche le di loro basi equidistanti dai centri delle rispettive sfere, e son perciò cerchj eguali (§ 542); e le omologhe porzioni, che dalla stessa Sfera, o da Sfer'eguali tagliano cerchj eguali son simili, ed eguali (§ 543); le porzioni dunque della stessa Sfera, o di Sfer' eguali, delle quali sono eguali i lati son simili, ed eguali; C. D. D.

LEMMA V.

§. 548. *Se da un punto preso nella superficie di Sferica porzione siansi tirate alla periferia della sua base più di due rett' eguali, è quello il vertice della stessa porzione.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 7. Dal punto B preso nella superficie della Sferica porzione BADC sianfi calate nella periferia della sua base l'eguali rette BA BD BC. Si unischi P centro della base della stessa porzione co' punti B A D C.

I triangoli BPA BPD BPC sono per l'ipotesi, e per la costruzione relativament' equilateri; eguali son dunque i di loro angoli in P; BP perciò, come normale alla base AC è l'altezza della porzione BADC, e'l punto B è il suo vertice. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 549. Ma son sempre più di due i lati d'ogni angolo solido, siccome son più di due i suoi piani; l'angolo dunque Solido equilatere compreso da Sferica porzione occupa col suo vertice quello della porzione, e sono i suoi lati della porzione medesima.

PRO-

PROPOSIZIONE VI.

§. 550. *Gli angoli Solidi assolutamente, e relativamente equilateri, se sono adattabili nella stessa Sfera son comprensibili da simili, ed eguali Sferiche porzioni.*

DIMOSTRAZIONE.

Gli angoli solidi equilateri, se sono adattabili nella Sfera son comprensibili da sferiche porzioni (§ 520); ma degli angoli solidi equilateri compresi da Sferiche porzioni sono i lati quelli delle porzioni medesime (§ pr): gli angoli dunque solidi, assolutamente, e relativamente equilateri, se sono adattabili nella stessa Sfera son comprensibili da Sferiche porzioni, delle quali sono egual' i lati; ma le porzioni della stessa Sfera, delle quali sono egual' i lati son simili, ed eguali (§547); gli angoli dunque Solidi assolutamente, e relativament' equilateri, se sono adattabili nella stessa Sfera son comprensibili da simili, ed eguali sferiche porzioni. C. D. D.

LEM-

LEMMA I.

Fig. 38. §. 551. *Dell' angolo solido ABCDE equilatere compreso nella Sferica porzione ABCDE non può muoversi lato alcuno per la periferia della base della stessa porzione, senz' alterare la quantità dell' uno, e l' altro angolo piano, che termina.*

DIMOSTRAZIONE.

Si creda in fatti mosso qualunque suo lato AC in qualunque altro punto F della stessa periferia, e si unisca BC BF DC DF.

Essendo per ipotesi l'angolo A equilatere, e compreso nella Sferica porzione ABCDE; sarà A anche vertice della stessa porzione, ed AF anche lato di essa, come quelli dell' angolo (§ 549), e perciò a ciascuno di quelli eguale (§ 524); ma essendo nel cerchio BCFDE l' arco BF maggiore di BC, e l'arco DC maggiore di DF; sarà il lato BF maggiore di BC, e 'l lato DC maggiore di DF; dunque l' angolo BAF è maggiore dell'

an-

angolo BAC, e l'angolo CAD maggiore dell'angolo FAD; ma non può muoversi il lato AC, o qualunque altro per quella periferia senz'alterare le quantità degli archi BC CD; dunque non può muoversi per la stessa senz'alterare le quantità degli angoli piani, che termina; C. D. D.

COROLLARIO.

§. 552. Poichè muovendosi un lato di un angolo Solido equilatere compreso in porzione Sferica per la periferia della base della stessa porzione, resta tuttavia compreso nella porzione medesima (§ 521); potrà dirsi, che nella stessa porzione Sferica possan comprendersi due ineguali angoli solidi, quantunque ne siano i lati assolutamente, e relativamente eguali (§ 355).

LEMMA II.

§. 553. *Non può farsi un Solido iscrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al suo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati così disposti, che in ogni angolo del Solido convenga un sol angolo di quadrato, e gli altri tutti di triangoli equilateri.*

DIMOSTRAZIONE.

Se potesse farsi, sarebbe tal Solido faciendo, ed il Solido Primo di Seconda Operazione di lati eguali (che si dirà solido fatto) iscrittibile nella stessa Sfera (§ 479); ma gli angoli Solidi de'Solidi iscrittibili alla sfera sono adattabili nella stessa (§ 528); gli angoli dunque del Solido faciendo, e del Solido fatto di lati eguali sarebbero adattabili nella stessa Sfera; ma gli angoli solidi assolutamente, e relativament' equilateri (come questi sarebbero) se siano adattabili nella stessa Sfera son comprensibili da simili, ed eguali Sferiche porzioni (§ 550); sarebbero dunque gli angoli solidi del Solido faciendo, e quelli del Solido fatto comprensibili in simili, ed eguali Sferiche porzioni; ma ne sarebbero dalla stessa ipotesi dell'uno, e l'altro Solido anche i piani relativamente simili, ed eguali (§ 462); disconverrebbe dunque solo il Solido faciendo dal Solido fatto, in doversi ammettere in ogni angolo solido del Solido faciendo un sol angolo di quadrato, ed in ogni angolo del Solido fatto due (§ 464); se potesse dunque farsi il So-

Solido faciendo, potrebbe del pari così alterarsi un angolo solido del Solido fatto, da sostituire in esso in vece del secondo angolo di quadrato uno, o più altri angoli di triangoli equilateri, senza però alterare in esso i preesistenti angoli di triangoli equilateri, e senza cacciarlo da quella Sferica porzione, in cui sarebbe l'angolo fatto comprensibile; senza in somma distrugere alcuna di quelle proprietà, che debbono anche nel Solido faciendo rinvenirsi; ma non può aver luogo alcuna delle divisate mutazioni, senza distrugere tali inalterabili proprietà del Solido.

I. Non può al secondo angolo di quadrato dell'angolo Solido del Solido fatto sostituirsi un angolo di triangolo equilatere, senza distrugersi le inalterabili proprietà del Solido; perchè non possono in esso i lati, che comprendono angolo di quadrato convergers' in angolo di triangolo equilatere, senza fare una mossa; or se si faccian muovere per la periferia del cerchio, che termina la porzione, in cui si comprendeva l'angolo del Solido fatto prima della mossa, si farà un ango-

lo nella ſteſſa porzione tuttavia comprenſibile (§ 521), ma ſi muteranno anche gli angoli preeſiſtenti di triangoli equilateri (§ 551); e ſe ſi faccian muovere fuori di quella periferia ſi farà un angolo non più comprenſibile in quella porzione (§ 521).

II. Non poſſono a quel ſecondo angolo di quadrato ſoſtituirſene due di triangoli equilateri, e molto meno dippiù, ſenz' alterare i preeſiſtenti angoli di triangoli equilateri; perchè ove poteſſe ciò farſi, potrebbero altri due ſoſtituirſene all' altro angolo di quadrato, ch' è nello ſteſſo angolo, ed allora ſi avrebbe un angolo ſolido fatto da ſei, o più angoli di triangoli equilateri, locchè ripugna; Non può dunque al ſecondo angolo di quadrato, ch' è in ogni angolo ſolido del Solido fatto ſoſtituirſi uno, o più angoli di triangoli equilateri; e perciò non può farſi un Solido iſcrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al ſuo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati, così diſpoſti, che in ogni ſuo angolo Solido convenga un ſol angolo di quadrato, e gli altri tutti di triangoli equilateri. C. D. D.

CO-

COROLLARIO.

§. 554. Se esiste un Solido iscrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al suo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati così disposti, che in ogni suo angolo solido convengano due angoli di quadrati, due di triangoli (§ 462), e non può esister quello, che avendo le stesse proprietà, solo da quello sconvenga in ammettere in ogni suo angolo solido un solo angolo di quadrato; converrà confessare, che ove debba farsi un Solido iscrittibile nella Sfera di lati tutti eguali al suo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati, così disposti, che in ogni suo angolo Solido ammetta dell' una, e l' altra specie, ma nel massimo numero possibile ammetta quelli di triangoli, nel minimo quelli di quadrati, debba questo avere ogni suo angolo solido compreso da due angoli di triangoli equilateri due di quadrati.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

§. 555. *Non può la Sfera toccar più di dodici Sfere eguali a se.*

DIMOSTRAZIONE.

Sarebbe la Sfera toccata dal massimo numero di altre Sfere eguali a se, quando siano tutte queste tra loro nella massima possibile aderenza; ma sono le Sfere nella massima possibile aderenza, quando sono combinate a triangolo (§ 500); sarebbe dunque la Sfera toccata dal massimo numero possibile di altre Sfere eguali a se, quando fussero queste tutte combinate a triangolo; ma non può la Sfera esser da pertutto toccata da altre Sfere eguali a se sommamente aderenti(§ 508), cioè tutte combinate a triangolo(§ 500); e la combinazione, che più alla massima aderenza s'avvicina è quella del quadrilatere (§ 500); sarà dunque la Sfera toccata dal massimo numero possibile di altre sfere eguali a se, se di queste ne siano nel massimo numero possibile combinate a triangolo, nel minimo combinate a quadrilatere; e perciò, se imprimano le esterne Sfere nella interiore tali punti di contatto, che uniti diano un So-

Solido iſcritto in eſſa di lati tutti eguali al ſuo ragio (§ 506) terminato dal maſſimo numero poſſibile di triangoli, dal minimo numero poſſibile di quadrilateri; ma ogni Solido iſcritto nella Sfera, ſe à eguali tutt'i ſuoi lati à regolari tutt'i ſuoi piani (§ 126); uniti dunque quei punti daranno un Solido terminato dal maſſimo numero poſſibile di triangoli equilateri, dal minimo poſſibile di quadrati; ma non potendo niuna dell'eſterne Sfere toccanti altre Sfere eguali a ſe aver le aggiacenti annularmente congiunte (§ 539), cioè tutte combinate a triangolo (§ 532); è neceſſario, che in ogni angolo di quel Solido intervenga angolo di quadrato; ed ove debba farſi un Solido iſcrittibile nella Sfera di lati tutti eguali al ragio di eſſa, terminato da triangoli equilateri, e quadrati, così diſpoſti, che in ogni ſuo angolo Solido ammetta dell'una, e l'altra ſpecie, ma nel maſſimo numero poſſibile ammetta quelli di triangoli, nel minimo quelli di quadrati, è neceſſario, che in ogni ſuo angolo Solido convengano due angoli di triangoli equilateri, due di quadrati (§ pr);

(§ pr); la combinazione dunque, anche più favorevole all' aderenza, ed alla pluralità dell'esterne Sfere toccanti, dovrà disegnare un Solido sì fatto; ma un Solido appunto sì fatto è il Solido Primo di Seconda Operazione (*a*), e ci à questo co' suoi angoli additata una combinazione, in cui l' esterne Sfere non sono, che dodici (*b*); non può dunque la Sfera toccar più di dodici altre Sfere eguali a se. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 556. Si è detto de' Solidi Regolari, degl'Innomati, e di quelli di Seconda Operazione ciocchè poteva, e come poteva dirsi nella prima produzion de' medesimi; altro, e meglio potrà certamente dirsi degli stessi da chi vorrà penetrar il secondo in questo stesso occulto ma già disserrato cammino; potrà dunque il saggio lettore compiacersi di perdonare il modo, ed il poco al primo scrutatore, ed animarsi a divenirne il secondo.

IL FINE.

(a) § 462 e § 479.
(b) § 447 e § 507.

S. R. M.

SIGNORE.

GEnnaro e Vincenzo di Simone supplicano la M. V. di voler dare alle stampe un opera intitolata: *Trattato de' Solidi ordinati, o regolari, de' Solidi che saran detti innominati*. Pertanto supplicano la M. V. di commetterne la revisione a chi meglio parerà, e l'avrà *ut Deus &c.*

A. & M. Rev. Prof. D. Marcellus Cecere J. U. D. perlegat, & in scriptis referat. Neapoli die 15. *mensis Aprilis* 1801.

F. A. C. M.

*

S. R. M.

SIGNORE.

NEl Trattato de' Solidi Regolari, e de' Solidi Innominati, che vuole dare alle ſtampe Gennaro, e Vincenzio de Simone, di cui la M. V. mi ha commeſſa la reviſione, non ſi contiene parola, che offenda il coſtume, o i dritti, e le leggi del voſtro Regno; onde ſon di parere, che poſſa la M. V. permettere, che ſi ſtampi; potendo piacere, e giovare la lettura di eſſo a chi ha delle matematiche facoltà intelletto. Napoli 20. Maggio 1801.

Umiliſs. e fedeliſs. ſuddito
Marcello Cecere.

Visa relatione Regii Revisoris imprimatur. Neapoli die 16. mensis Julii 1801.

F. A. C. M.

Joseph Abate Secr.

Visa relatione Domini D. Marcelli Cesere de commissione Rev. Reg. Cap. Maj.

Die 21. mensis Julii 1801. Neap.

Regalis Camera S. Claræ providet, decernit, atque mandat quod imprimatur cum inserta forma præsentis supplicis libelli, ac approbationis dicti Rev. Revisoris; Verum non publicetur nisi per ipsum Revisorem facta iterum revisione affirmetur quod concordat servata forma Regalium Ordinum, ac etiam in publicatione servetur Regia Pragmatica. Hoc suum &c.

BISOGNI. CIANCIULLI.

V. A. R. C.

Pascale.

Illustris Marchio de Jorio Pro-Præs. S.R.C., & cæteri Spect. Aular. Præf., temp. subscript. imped.

Adm. Rev. Dom. D. Antonius Febraro S. Th. Prof. revideat opus supradictum, & scripto referat. Die 12. mensis Sept. 1801.

F. ROSSI CAN. DEP.

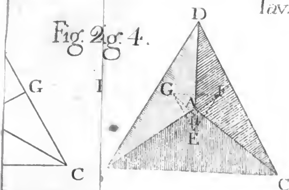
ILLUSTRISSIMO SIGNORE.

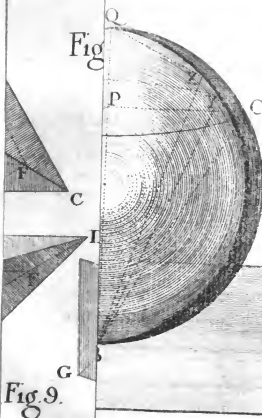
AVendo letto per ordine di V. S. Ill. il Trattato de' Solidi Regolari, ed Innominati composto dal Sacerdote Napoletano D. Cesare Puoti, che bramano dar alla luce per mezzo delle stampe i fratelli Gennaro, e Vincenzo di Simone; non ho ravvisato cosa in esso, che fusse opposta o alla purità della Fede, od alla integrità de' costumi; anzi è portata in maniera la sua tessitura, che possa riuscir vantaggiosa a chi ama applicarsi alle mattematiche discipline. Perciò son di parere, se diversamente non giudica V.S.Ill., potersi accordare la permissione delle stampe.

Napoli 20. Settembre 1801.

Di V.S.Ill.

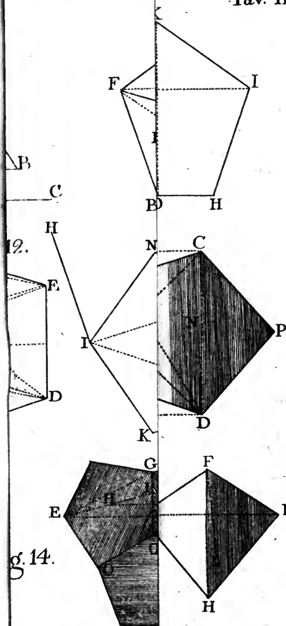
Umiliss. ed ossequiosiss. servidore
Antonio Febraro.





Delia inc.

Tav. II.

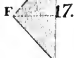


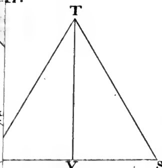


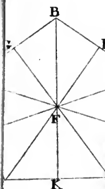
Tav. III.

16.









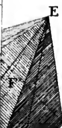
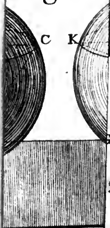
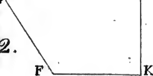


Fig. 20.

Fig. 21.



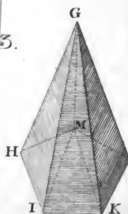




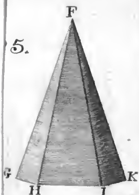
2.



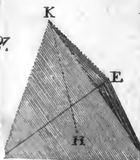
Tav. IV.

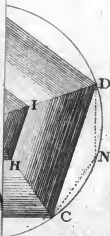






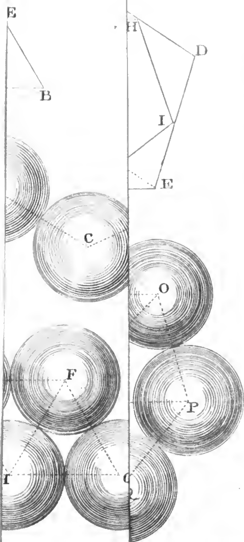







VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Tav. V.




NAPOLI

Tav. VI.

